Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ
Ιωάννης Βανδουλάκης, Μαθηματικός, διδάσκων με σύμβαση εργασίας (Π.Δ. 407/80) στο Πανεπιστήμιο του Αιγαίου
Χαράλαμπος Καλλιγάς, Μαθηματικός - Πληροφορικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης
Νικηφόρος Μαρκάκης, Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης
Σπύρος Φερεντίνος, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ
Χαράλαμπος Τσίτουρας, Αν. Καθηγητής ΑΤΕΙ - Χαλκίδας
Γεώργιος Μπαραλός, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Χαρίκλεια Κωνσταντακοπούλου, Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ
Κλειώ Γκιζελή, Ζωγράφος
Ιόλη Κυρούση, Γραφίστρια

ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
Βαρβάρα Δερνελή, Φιλόλογος, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ
Αθανάσιος Σκούρας, Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΕΞΩΦΥΛΛΟ
Μανώλης Χάρος, Ζωγράφος

ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ

Στη συγγραφή του πρώτου μέρους (1/3) έλαβε μέρος και η **Θεοδώρα Αστέρη**, Εκπαιδευτικός Α/θμιας Εκπαίδευσης

Γ΄ Κ.Π.Σ. / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.
Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»
Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΚΣΥΓΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΨΗΦΙΑΚΗΣ ΜΑΚΕΤΑΣ,
ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΑΛΛΑΓΩΝ ΒΑΣΕΙ ΥΠΟΔΕΙΞΕΩΝ
ΤΟΥ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟΥ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟΥ,
ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ:
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΕΚΔΟΣΕΩΝ / Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

Ιωάννης Βανδουλάκης
Χαράλαμπος Καλλιγάς
Νικηφόρος Μαρκάκης
Σπύρος Φερεντίνος

Μαθηματικά

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στο Δημοτικό σχολείο ολοκληρώθηκε ο πρώτος κύκλος της βασικής εκπαίδευσης. Στο Γυμνάσιο, θα στηριχτούμε στις γνώσεις που αποκτήσαμε μέχρι τώρα, θα τις αξιοποιήσουμε και θα προσπαθήσουμε να τις αναπτύξουμε και να τις διευρύνουμε.

Στην πορεία αυτή, ίσως διαπιστώσουμε ότι οι γνώσεις που διαθέτουμε δεν επαρκούν πάντα. Πρέπει, λοιπόν, να συμπληρωθούν κατάλληλα και μετά να προχωρήσουμε στο επόμενο βήμα, στο νέο προβληματισμό και τέλος στην καινούρια γνώση. Έτσι, με τη δική μας προσπάθεια και παράλληλα με τη βοήθεια και την καθοδήγηση του καθηγητή μας, θα καταφέρουμε, όλοι μαζί μέσα στην τάξη, να αναπτύξουμε τις δυνατότητές μας, προσθέτοντας, όχι μόνο γνώσεις αλλά και νέους τρόπους να τις αποκτούμε.

Τα Μαθηματικά τα γνωρίζουμε ως ένα σχολικό μάθημα. Δεν πρέπει όμως να μείνουμε μόνο σ' αυτό. Όσα περισσότερα Μαθηματικά ξέρουμε και χρησιμοποιούμε, τόσο καλύτερα ερμηνεύουμε τον κόσμο μας και τελικά τον κατανοούμε. Είναι ένας κώδικας απαραίτητος για την κατανόηση του κόσμου μας, που λειτουργεί όπως η "γλώσσα" προγραμματισμού στους υπολογιστές. Όσες περισσότερες "λέξεις" ξέρει κανείς από αυτή τη "γλώσσα", δηλαδή τα Μαθηματικά, τόσο καλύτερα αξιοποιεί τις δυνατότητες του μυαλού του. Επίσης, τα Μαθηματικά δεν είναι απλά ένα εργαλείο για τη βελτίωση των ατομικών επιδόσεων, αλλά ένας βασικός μοχλός που βοηθάει την κοινωνική ανάπτυξη.

Το βιβλίο αυτό φιλοδοξεί να αποτελέσει ένα βήμα προς τις κατευθύνσεις αυτές. Είναι γραμμένο σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) και το νέο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου, καθώς και τις συγκεκριμένες προδιαγραφές και οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Σημαντικό χαρακτηριστικό του βιβλίου αυτού είναι ότι η παρουσίαση της θεωρίας περιορίζεται συχνά, για να αφήσει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν, με τη βοήθεια των καθηγητών τους, τη διαίσθηση, τη δοκιμή, την έρευνα και τέλος την αναγκαία σύνθεση.

Οι δραστηριότητες που προτείνονται και προηγούνται της θεωρίας, έχουν στόχο να υπάρξει ο προβληματισμός και η αναζήτηση που θα μας οδηγήσει στην ανάγκη να αναπτύξουμε την κατάλληλη θεωρία. Έτσι, γίνεται φανερό ότι η θεωρία είναι αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης αναζήτησης και όχι αυτοσκοπός. Οδηγός σ' αυτό το βηματισμό θα είναι και πάλι ο συνάδελφος καθηγητής του Γυμνασίου, που χωρίς τη δική του ουσιαστική συμβολή τίποτα δεν ολοκληρώνεται.

Πιστεύουμε ότι οι γονείς των μαθητών της Α' Γυμνασίου γνωρίζουν καλά, ότι σ' αυτή την ηλικία το σημαντικότερο δεν είναι η συνεχής συσσώρευση γνώσεων – που φαίνονται ατελείωτες και συχνά μένουν στείρες – αλλά ο τρόπος που αποκτάται σε κάθε περίπτωση η απαραίτητη γνώση. Αν στον τρόπο αυτό προστεθεί και η μέθοδος εμπέδωσης και αξιοποίησής της, τότε αυτή η γνώση παίρνει διαστάσεις του πολύτιμου αγαθού και της κοινωνικής αξίας, που παραμένει ο τελικός στόχος κάθε εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Στην εποχή μας, που όλα μεταβάλλονται ταχύτατα – και μαζί τους οι θεωρίες, οι απόψεις και οι θέσεις – κανείς δεν ισχυρίζεται ότι ένα σχολικό βιβλίο μπορεί να συνθέσει όλες τις απόψεις και να περιλάβει, στο σύνολό της, την εκπαιδευτική εμπειρία τόσων αιώνων.

Ως συγγραφείς του βιβλίου, θα είμαστε ευτυχείς αν οι συνάδελφοι καθηγητές, αλλά και όλοι οι ενδιαφερόμενοι, στείλουν στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο τις κρίσεις και τις παρατηρήσεις τους, ώστε να γίνει κατά το δυνατόν καλύτερο τούτο το βιβλίο. Το ποσοστό της "αλήθειας" που αυτό περιέχει θα διευρυνθεί όταν η προσπάθεια γίνει πιο συλλογική. Γι' αυτή την "αλήθεια" που, όπως λέει ο Ελύτης:

"Αιώνες τώρα ρωτούν οι μάγοι
μα οι αστέρες αποκρίνονται κατά προσέγγιση".

Οι συγγραφείς

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ - ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕΡΟΣ Β΄ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ Γ΄ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΜΕΡΟΣ Α΄

1ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Φυσικοί αριθμοί

1.1. Φυσικοί Αριθμοί - Διάταξη - Στρογγυλοποίηση

- *Κατανοώ τους φυσικούς αριθμούς*
- *Αντιστοιχίζω τους φυσικούς αριθμούς με σημεία του άξονα*
- *Συγκρίνω φυσικούς αριθμούς*
- *Στρογγυλοποιώ φυσικούς αριθμούς*

1.2. Πρόσθεση - Αφαίρεση και Πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

- *Προσθέτω, αφαιρώ και πολλαπλασιάζω φυσικούς αριθμούς*
- *Γνωρίζω τις ιδιότητες των πράξεων και τις χρησιμοποιώ στον υπολογισμό της τιμής μιας παράστασης*
- *Εκτελώ τις πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση με την προβλεπόμενη προτεραιότητα*

1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών

- *Κατανοώ την έννοια της δύναμης $α^ν$ και διαβάζω δυνάμεις*
- *Υπολογίζω δυνάμεις με μικρό εκθέτη και για τις δυνάμεις του 10 εφαρμόζω τις ισότητες: $10^ν = 10 \ldots 0$ (ν μηδενικά), $2 \cdot 10^ν = 20 \ldots 0$ (ν μηδενικά) κ.λπ.*
- *Εφαρμόζω την προτεραιότητα των πράξεων στον υπολογισμό παραστάσεων με δυνάμεις και παρενθέσεις*

1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα

- *Γνωρίζω την ταυτότητα της ευκλείδιας διαίρεσης*
- *Υπολογίζω το πηλίκο και το υπόλοιπο της ευκλείδιας διαίρεσης δύο ακεραίων και γράφω την ισότητα αυτής*
- *Κατανοώ ότι οι εκφράσεις: "Ο Δ είναι πολλαπλάσιο του δ", "Ο δ είναι διαιρέτης του Δ" και "Ο Δ διαιρείται με τον δ" είναι ισοδύναμες με την έκφραση: "Η ευκλείδεια διαίρεση του Δ με τον δ είναι τέλεια"*

1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας - Μ.Κ.Δ. - Ε.Κ.Π. - Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

- *Γνωρίζω ποιοι αριθμοί λέγονται πρώτοι και ποιοι σύνθετοι*
- *Γνωρίζω και χρησιμοποιώ τα κριτήρια διαιρετότητας με το 2, το 4, το 5 και το 10 καθώς και με το 3 και το 9*
- *Αναλύω δύο ή περισσότερους αριθμούς σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και βρίσκω μ' αυτόν τον τρόπο το Μ.Κ.Δ. και το Ε.Κ.Π. αυτών*

ΠΥΘΑΓΟΡΑΣ Ο ΣΑΜΙΟΣ
(580 - 500 π.Χ.)

- Θέλεις να έχεις ή να ξέρεις; ρώτησε ο θείος τον ανηψιό του λίγο πριν τον αποχαιρετήσει στο αεροδρόμιο.

Το αγόρι κοίταξε το θείο του με μεγάλη απορία προσπαθώντας να καταλάβει τι εννοούσε με την ερώτησή του.

- Θέλεις να έχεις πράγματα ή να ξέρεις γι' αυτά; συμπλήρωσε ο θείος του.

Πριν ακόμα προλάβει το παιδί να απαντήσει, ο θείος του συνέχισε:

- Περάσαμε όμορφα στις διακοπές. Τώρα είναι Σεπτέμβριος, εγώ γυρίζω στη δουλειά μου κι εσύ αρχίζεις το Γυμνάσιο. Θα σε ξαναδώ τον χρόνου το καλοκαίρι και θα είσαι ένα χρόνο και μία τάξη μεγαλύτερος. Έπιασε το αγόρι από τους ώμους και κοιτώντας το στα μάτια πρόσθεσε:

- Δε θέλω να μου απαντήσεις τώρα. Θα σε ξαναρωτήσω τον χρόνου. Έχεις, λοιπόν, καιρό να το ψάξεις, να κάνεις υποθέσεις, να φτιάξεις ιστορίες και πιθανά σενάρια, να σκεφτείς. Κυρίως αυτό: να σκεφτείς, είπε, σφίγγοντάς του τα χέρια.

"Παρακαλούνται οι επιβάτες της πτήσης για Παρίσι να προσέλθουν στον έλεγχο των εισιτηρίων", ακούστηκε η αναγγελία από τα μεγάφωνα.

- Και κοίτα, αν δεν έχεις σίγουρη απάντηση, δεν πειράζει. Η διαδρομή αυτή μπορεί να αξίζει περισσότερο. Το μυαλό μπορεί να φτιάξει μόνο του έναν ολόκληρο κόσμο. "Καλή πορεία, αγόρι μου".

- Καλό ταξίδι, θείε...

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΞΗ

Η τάξη είναι η ίδια ένα ταξίδι. Είναι μια διαδρομή από σκέψη σε σκέψη, από μία γνώμη σε μια άλλη, από μια έκφραση σε έναν συλλογισμό. Απόψεις που συμφωνούν, γνώμες που είναι διαφορετικές, ιδέες που διαμορφώνονται, συνθέτουν νέες γνώσεις και προσθέτουν εμπειρίες. Η θεωρία αναπτύσσεται μετά από τον σχετικό προβληματισμό και τον διάλογο που γίνεται μέσα στην τάξη. Είναι η τελική θέση στην οποία καταλήγουμε, αφού δοκιμάσουμε και επαληθεύσουμε τη σκέψη μας. Ακριβώς γι αυτό προηγούνται οι σχετικές δραστηριότητες. Μέσα απ' αυτές θα προβληματιστούμε και θα εκφράσουμε την άποψή μας. Δε σημαίνει ότι σε όλα θα έχουμε απαντήσεις και ότι όλα θα τα μπορέσουμε μόνοι μας. Γι' αυτό είναι και οι άλλοι. Αρκεί να μάθουμε ν' ακούμε τη γνώμη τους. Η σκέψη των άλλων θα πάει τη δική μας ένα βήμα παραπέρα. Σ' αυτό μας συντονίζει και μας βοηθάει ο καθηγητής μας. Όλοι μαζί και ομαδικά θα καταφέρουμε περισσότερα. Ας αρχίσουμε λοιπόν.

Α.1.1. Φυσικοί αριθμοί - Διάταξη Φυσικών - Στρογγυλοποίηση

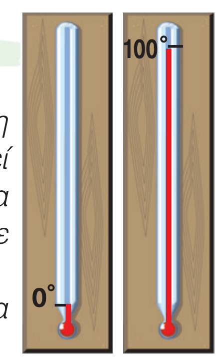
Από το Δημοτικό σχολείο μάθαμε την έννοια του φυσικού αριθμού. Στην παράγραφο αυτή γίνεται επανάληψη της έννοιας, της διάταξης και της στρογγυλοποίησης των φυσικών αριθμών. Μέσα από τις δραστηριότητες, που ακολουθούν, θα προσπαθήσουμε να ξαναθυμηθούμε αυτά που έχουμε μάθει και να τα διατυπώσουμε με πιο οργανωμένη σκέψη.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Διάλεξε έναν τριψήφιο αριθμό. Βρες όλους τους διαφορετικούς τριψήφιους αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξεις τα ψηφία του αριθμού που διάλεξες και γράψε αυτούς με όλους τους δυνατούς τρόπους.

- *Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;*
- *Γράψε όλους τους αριθμούς που βρήκες με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.*
- *Στη συνέχεια, γράψε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η



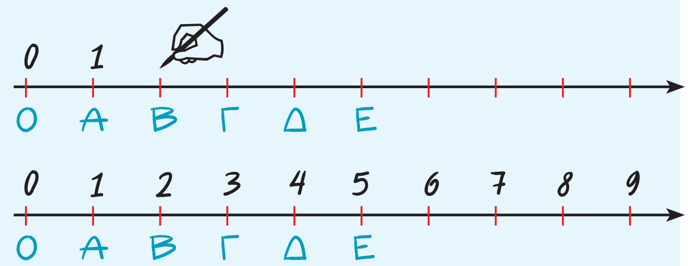
Για να βαθμολογήσουμε ένα θερμόμετρο ακολουθούμε μια συγκεκριμένη μέθοδο: Το αφήνουμε στον πάγο αρκετή ώρα και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το μηδέν (0°). Στη συνέχεια το αφήνουμε μέσα σε νερό που βράζει και στο σημείο που θα σταθεί ο υδράργυρος σημειώνουμε το εκατό (100°).

- *Σκέψου και διατύπωσε έναν τρόπο με τον οποίο θα μπορούσες να σημειώσεις και όλες τις ενδιάμεσες ενδείξεις.*

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., 98, 99, 100, ..., 1999, 2000, 2001, ... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί.**
  - ► **Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και έναν προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.**
- Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους **άρτιους ή ζυγούς** και τους **περιττούς ή μονούς**.
- **Άρτιοι** λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που διαιρούνται με το 2 και **περιττοί** εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.
- Το **δεκαδικό σύστημα αρίθμησης** δίνει τη δυνατότητα να σχηματίζουμε το **απεριόριστο** πλήθος των φυσικών αριθμών χρησιμοποιώντας μόνο τα δέκα γνωστά ψηφία: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
  - ► **Η δυνατότητα αυτή υπάρχει γιατί η αξία ενός ψηφίου καθορίζεται και από τη θέση που κατέχει, δηλαδή τη δεκαδική τάξη του** (μονάδες, δεκάδες, εκατοντάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδες, εκατοντάδες χιλιάδες, ...).
- Στο εξής θα χρησιμοποιούμε τα παρακάτω σύμβολα:
  το $=$ που σημαίνει "**ίσος με**",
  το $<$ που σημαίνει "**μικρότερος από**" και
  το $>$ που σημαίνει "**μεγαλύτερος από**".
  - ► **Μπορούμε πάντα να συγκρίνουμε δύο φυσικούς αριθμούς μεταξύ τους.** Επομένως έχουμε τη δυνατότητα **να διατάξουμε** τους φυσικούς αριθμούς **από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο**, δηλαδή με **αύξουσα** σειρά μεγέθους. Για παράδειγμα: $0<1<2<3<$ .... $<10<11<12<$ ... $<297<$ ... $<1000<$ ...

- Η δυνατότητα αυτή, της διάταξης των φυσικών αριθμών, επιτρέπει να τους τοποθετήσουμε πάνω σε μια ευθεία γραμμή με τον παρακάτω τρόπο:
Διαλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο **Ο** της ευθείας, που το λέμε **αρχή**, για να παραστήσουμε τον αριθμό 0. Μετά δεξιά από το σημείο **Ο** διαλέγουμε ένα άλλο σημείο **Α**, που παριστάνει τον αριθμό **1**. Τότε, με μονάδα μέτρησης το **ΟΑ**, βρίσκουμε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: **2, 3, 4, 5,** ...



Στρογγυλοποίηση

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Στις 13 Ιουνίου 2004, ακούστηκε στις ειδήσεις ότι από τα 450 εκατομμύρια *πολιτών της Ευρωπαϊκής Ένωσης, ψηφίζουν τα* 338 εκατομμύρια *για να εκλέξουν* 732 *βουλευτές του Ευρωκοινοβουλίου.*

- *Γιατί δεν αναφέρθηκε το ακριβές πλήθος των* 454.018.512 *πολιτών της Ε.Ε., καθώς και ο ακριβής αριθμός των* 337.922.145 *που είχαν δικαίωμα ψήφου;*
- *Γιατί, αντίθετα, στην περίπτωση των* 732 *ευρωβουλευτών, αναφέρθηκε ο ακριβής αριθμός;*
- *Πότε επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε αυτή τη διαδικασία προσέγγισης ενός φυσικού αριθμού;*

Σκεφτόμαστε

Η δραστηριότητα αυτή μας οδηγεί να προβληματιστούμε γιατί σε αριθμούς, όπως το ακριβές πλήθος των πολιτών της Ε.Ε., δε χρειάζεται να αναφερθούμε με ακρίβεια, ενώ σε άλλους, όπως ο αριθμός των ευρωβουλευτών, απαιτείται ακρίβεια. Πότε, γενικότερα, η ακριβής διατύπωση ενός αριθμού είναι αναγκαία;
Στην περίπτωση του πλήθους των πολιτών ή των ψηφοφόρων της Ε.Ε., αυτό που κυρίως ενδιαφέρει είναι η “τάξη μεγέθους”, π.χ. τα εκατομμύρια. Ενώ για τους ευρωβουλευτές ο ακριβής αριθμός είναι απαραίτητος, π.χ. στις ψηφοφορίες.
Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι χρειάζεται μια διαδικασία που μας βοηθάει να εκφράσουμε, με τρόπο κοινά αποδεκτό, έναν φυσικό αριθμό για τον οποίο δεν απαιτείται ακρίβεια. Για παράδειγμα το ύψος ενός βουνού που είναι 1987 m., λέμε, συνήθως, 2000 m. Ενώ ο αριθμός ενός τηλεφώνου, το ΑΦΜ ή ο ταχυδρομικός κωδικός αναφέρονται πάντα με ακρίβεια.

Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Πολλές φορές αντικαθιστούμε έναν φυσικό αριθμό με μια προσέγγισή του, δηλαδή κάποιο άλλο λίγο μικρότερο ή λίγο μεγαλύτερό του. Τη διαδικασία αυτή την ονομάζουμε **στρογγυλοποίηση**.
- Για να στρογγυλοποιήσουμε έναν φυσικό αριθμό:
  - Προσδιορίζουμε την τάξη στην οποία θα γίνει η στρογγυλοποίηση.
  - Εξετάζουμε το ψηφίο της αμέσως μικρότερης τάξης.
  - Αν αυτό είναι **μικρότερο** του **5** (δηλαδή **0, 1, 2, 3** ή **4**), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων **μηδενίζονται**.
  - Αν είναι **μεγαλύτερο ή ίσο** του **5** (δηλαδή **5, 6, 7, 8** ή **9**), το ψηφίο αυτό και όλα τα ψηφία των μικρότερων τάξεων αντικαθίστανται από το μηδέν και το ψηφίο της τάξης στρογγυλοποίησης **αυξάνεται κατά 1**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να στρογγυλοποιηθεί ο αριθμός 9.573.842 στις (α) εκατοντάδες, (β) χιλιάδες, (γ) εκατομμύρια.

Λύση

(α) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **εκατοντάδες.**
Προηγούμενη τάξη: 4 < 5. Το 4 και όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν. 9.573.842 ➜ 9.573.800

(β) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **χιλιάδες.**
Προηγούμενη τάξη: 8 > 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν και το 3 γίνεται 4. 9.573.842 ➜ 9.574.000

(γ) *Τάξη στρογγυλοποίησης:* **εκατομμύρια.**
Προηγούμενη τάξη: 5 = 5. Όλα τα προς τα δεξιά ψηφία αντικαθίστανται από το μηδέν και το 9 γίνεται 10. 9.573.842 ➜ 10.000.000

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Γράψε με ψηφία τους αριθμούς που δίνονται παρακάτω σε φυσική γλώσσα:* *(α)* διακόσια πέντε, *(β)* επτακόσια τριάντα δύο, *(γ)* είκοσι χιλιάδες οκτακόσια δέκα τρία.

2. *Γράψε σε φυσική γλώσσα τους αριθμούς: (α)* 38.951, *(β)* 5.000.812, *(γ)* 120.003.

3. *Ποιοι είναι οι τρεις προηγούμενοι αριθμοί του* 289 *και ποιοι οι δύο επόμενοι;*

4. *Τοποθέτησε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:* 3.515, 4.800, 3.620, 3.508, 4.801.

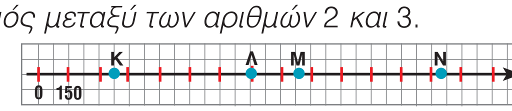
5. *Τοποθέτησε το κατάλληλο σύμβολο: <, =, >, στο κενό μεταξύ των ακόλουθων αριθμών:* *(α)* 45...45 *(β)* 38...36, *(γ)* 456...465, *(δ)* 8.765...8.970, *(ε)* 90.876...86.945, *(στ)* 345...5.690.

6. *Κατασκεύασε έναν άξονα με αρχή το σημείο* Ο *και μονάδα* ΟΑ *ίσο με* 2 cm. *Τοποθέτησε τα σημεία* Β, Γ, Δ, Ε *σε αποστάσεις* 6 cm, 10 cm, 12 cm *και* 14 cm *αντίστοιχα. Ποιοι αριθμοί αντιστοιχούν στα σημεία αυτά;*

7. *Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.*

	ΣΩΣΤΟ	*ΛΑΘΟΣ*
(α) Στον αριθμό 5780901 *το μηδέν δηλώνει απουσία δεκάδων και χιλιάδων.*		
(β) Δέκα χιλιάδες είναι μία δεκάδα χιλιάδων.		
(γ) Σε μια πενταήμερη εκδρομή θα γίνουν πέντε διανυχτερεύσεις.		
(δ) Από τον αριθμό 32 *ως και τον αριθμό* 122 *υπάρχουν* 91 *αριθμοί.*		
(ε) Σε οκτώ ημέρες από σήμερα, που είναι Πέμπτη,θα είναι Παρασκευή.		
(στ) Από την 12η *σελίδα του βιβλίου μέχρι και την* 35η *είναι* 24 *σελίδες.*		
(ζ) Δεν υπάρχει φυσικός αριθμός μεταξύ των αριθμών 2 *και* 3.		

Οι επόμενες τέσσερις ερωτήσεις αναφέρονται στο σχήμα.



(η) Στο σημείο Κ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 370.		
(θ) Στο σημείο Λ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1050.		
(ι) Στο σημείο Μ *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1200.		
(ια) Στο σημείο Ν *αντιστοιχεί ο αριθμός* 1875.		

8. *Στρογγυλοποίησε στην πλησιέστερη εκατοντάδα τους αριθμούς:* 345, 761, 659, 2.567, 9.532, 123.564, 34.564, 31.549 *και* 8.765.

9. *Στρογγυλοποίησε τον αριθμό* 7.568.349 *στις πλησιέστερες: (α) δεκάδες, (β) εκατοντάδες, (γ) χιλιάδες, (δ) δεκάδες χιλιάδες, (ε) εκατοντάδες χιλιάδες.*

Α.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με τις "πράξεις" των φυσικών αριθμών. Το ουσιαστικό "πράξη" προκύπτει από το ρήμα "πράττω" και δηλώνει μια δράση ή ενέργεια. Οι αριθμοί που έχουμε γνωρίσει μέχρι τώρα υλοποιούν ανάγκες μέτρησης. Σύνθετες μετρήσεις προκύπτουν από απλές μετρήσεις με τη διδικασία των πράξεων, όπως για παράδειγμα της πρόσθεσης και της αφαίρεσης.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

Ο διπλανός πίνακας δίνει τα αθροίσματα, δηλαδή τα αποτελέσματα της πρόσθεσης των μονοψήφιων φυσικών αριθμών.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

- *Τι παρατηρείς για την πρόσθεση με το 0;*
- *Πόσοι αριθμοί μπορούν να προστεθούν κάθε φορά;*
- *Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 12 και διαφορά 2. Μπορείς να βρεις τους αριθμούς αυτούς;*
- *Σύγκρινε τα αθροίσματα 3 + 6 και 6 + 3 και μετά τα αθροίσματα (5+4) + 2 και 5 + (4+2)*
- *Διατύπωσε τα συμπεράσματά σου.*
- *Φτιάξε ένα παρόμοιο πίνακα για τον πολλαπλασιασμό, διατύπωσε τα αντίστοιχα ερωτήματα και προσπάθησε να δώσεις τις κατάλληλες απαντήσεις.*

Σκεφτόμαστε

Παρατηρούμε ότι κάθε φορά μπορούμε να προσθέσουμε δύο μόνο αριθμούς, συνεπώς από τα ζευγάρια των αριθμών που έχουν άθροισμα 12, δηλαδή 9+3, 8+4, 7+5, 6+6, εκείνο που έχει διαφορά 2 είναι το ζευγάρι των αριθμών 7 και 5.
Επίσης, παρατηρούμε ότι: 0+1=1+0=1, 0+2=2+0=2, 0+3=3+0=3, κ.ο.κ.
Η σύγκριση των αθροισμάτων 3+6=9 και 6+3=9, όπως και άλλων τέτοιων αθροισμάτων π.χ. 7+1=8 και 1+7=8 κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της αντιμεταθετικής ιδιότητας.
Επίσης, η σύγκριση των αθροισμάτων: (5+4)+2=11 και 5+(4+2)=11, αλλά και άλλων αθροισμάτων, όπως π.χ. (9+1)+3=13 και 9+(1+3)=13 κ.λπ., μας οδηγούν στη διατύπωση της προσεταιριστικής ιδιότητας. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τις ιδιότητες της πρόσθεσης και αντίστοιχα του πολλαπλασιασμού των φυσικών αριθμών.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

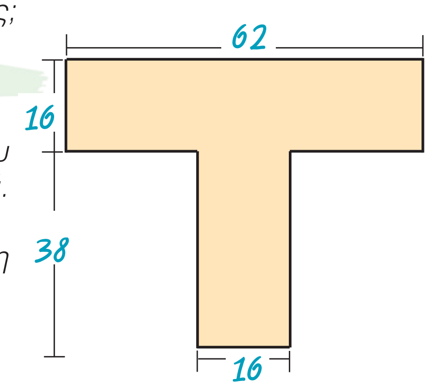
Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

- *Μπορείς να βρεις τις μεταξύ των πόλεων αποστάσεις;*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

Ο Σπύρος υπολόγισε με το μυαλό του το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκε 1600 τετραγωνικά χιλιοστά.

- *Υπολόγισε και συ το εμβαδόν και δώσε μια εξήγηση για το τι ακριβώς έκανες για να το βρεις.*



Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

Πρόσθεση

$13 + 5 = 18$

Προσθετέοι Άθροισμα

Ιδιότητες της πρόσθεσης:

- Το **άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με το μηδέν** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό** $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα** $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

● **Αφαίρεση** είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, **Μ (μειωτέος)** και **Α (αφαιρετέος)** βρίσκουμε έναν αριθμό **Δ (διαφορά)**, ο οποίος όταν προστεθεί στο **Α** δίνει το **Μ**.

$M = A + \Delta$

και γράφουμε

$\Delta = M - A$

◆ **Στους φυσικούς αριθμούς ο αφαιρετέος Α πρέπει να είναι πάντα μικρότερος ή ίσος του μειωτέου Μ.** Σε αντίθετη περίπτωση η πράξη της αφαίρεσης δεν είναι δυνατόν να εκτελεστεί.

Πολλαπλασιασμός

$7 \cdot 6 = 42$

Παράγοντες Γινόμενο

Ιδιότητες του πολλαπλασιασμού:

- Το **γινόμενο ενός φυσικού αριθμού με τη μονάδα** ισούται με τον **ίδιο τον αριθμό** $\alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$
- **Αντιμεταθετική ιδιότητα** (Μπορούμε να αλλάζουμε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου) $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$
- **Προσεταιριστική ιδιότητα** $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την πρόσθεση** $\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
- **Επιμεριστική ιδιότητα** του πολλαπλασιασμού **ως προς την αφαίρεση** $\alpha\cdot(\beta-\gamma)=\alpha\cdot\beta-\alpha\cdot\gamma$
- **Το γινόμενο ενός φυσικού αριθμού επί το μηδέν** ισούται με **το μηδέν** $\alpha\cdot 0 = 0\cdot\alpha = 0$

Η πρώτη εμφάνιση των συμβόλων **+** *και* **–** *χρονολογείται από τα τέλη του 15ου αιώνα, αλλά η γενικευμένη χρήση τους εμφανίζεται τον 19ο αιώνα. Αρχικά για την αφαίρεση χρησιμοποιήθηκε το σύμβολο «***:***».*
Λέγεται ότι η καταγωγή των συμβόλων αυτών οφείλεται στους εμπόρους που τα χρησιμοποιούσαν για να δηλώσουν ότι ένα βάρος βρέθηκε πιο πολύ ή πιο λίγο, αντίστοιχα, από το κανονικό.
Τα σύμβολα **x** *και* **=** *καθιερώθηκαν από Άγγλους μαθηματικούς το 1632 και το 1557 αντίστοιχα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Να υπολογιστούν τα γινόμενα: (α) 35 · 10, (β) 421 · 100, (γ) 5 · 1.000, (δ) 27 · 10.000*

Λύση

(α) 35 · 10 = 350
(β) 421 · 100 = 42.100
(γ) 5 · 1.000 = 5.000
(δ) 27 · 10.000 = 270.000

Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι για να πολλαπλασιάσουμε έναν αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφουμε στο τέλος του αριθμού τόσα μηδενικά όσα έχει κάθε φορά ο παράγοντας 10, 100, 1.000 ....

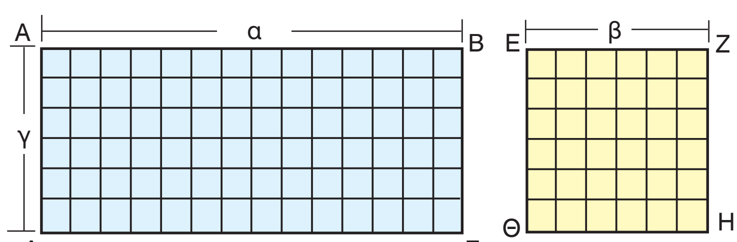
2. *Να εκτελεστούν οι ακόλουθες πράξεις:*
(α) 89 · 7 + 89 · 3, (β) 23 · 49 + 77 · 49, (γ) 76 · 13 – 76 · 3, (δ) 284 · 99

Λύση

(α) 89 · 7 + 89 · 3 = 89 · (7 + 3) = 89 · 10 = 890
(β) 23 · 49 + 77 · 49 = (23 + 77) · 49 = 100 · 49 = 4.900
(γ) 76 · 13 - 76 · 3 = 76 · (13-3) = 76 · 10 = 760
(δ) 284 · 99 = 284 · (100 - 1) = 284 · 100 - 284 · 1 = 28.400 - 284 = 28.116

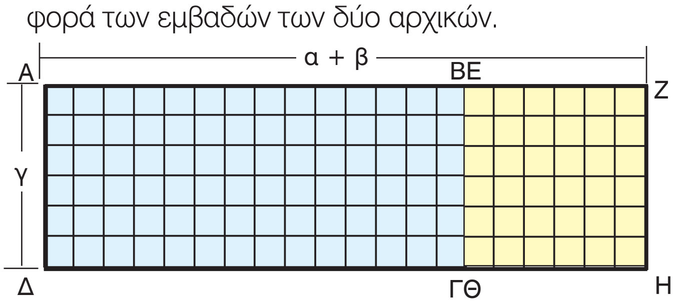
3. *Να ερμηνευτούν με γεωμετρικό τρόπο οι επιμεριστικές ιδιότητες:*
$(α + β) \cdot γ = α \cdot γ + β \cdot γ$ και $(α – β) \cdot γ = α \cdot γ – β \cdot γ$

Λύση

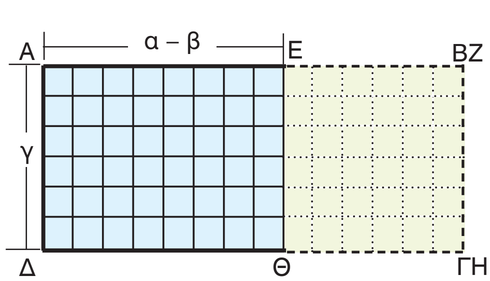


Εμβαδόν ΑΒΓΔ = α · γ *Εμβαδόν* ΕΖΗΘ=β·γ

Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα (μπλε και κίτρινο) έχουν μία διάσταση με το ίδιο μήκος **γ**. Για αυτό τον λόγο μπορούμε, αν τα "κολλήσουμε", όπως φαίνεται στο σχήμα, να φτιάξουμε ένα τρίτο, το **ΑΖΗΔ**, με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών τους. Αν βάλουμε το μικρότερο πάνω στο μεγαλύτερο, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα αποκτήσουμε ένα άλλο, το **ΑΕΘΔ**, που θα έχει εμβαδόν ίσο με τη διαφορά των εμβαδών των δύο αρχικών.



Εμβ. ΑΖΗΔ = *Εμβ.* ΑΒΓΔ + *Εμβ.* ΕΖΗΘ
Οπότε: (α+β) · γ = α · γ + β · γ



Εμβ. ΑΕΘΔ = *Εμβ.* ΑΒΓΔ – *Εμβ.* ΕΖΗΘ
Οπότε: (α–β) · γ = α · γ – β · γ

21-0027 book.indb 16 16/1/2013 9:36:37 μμ