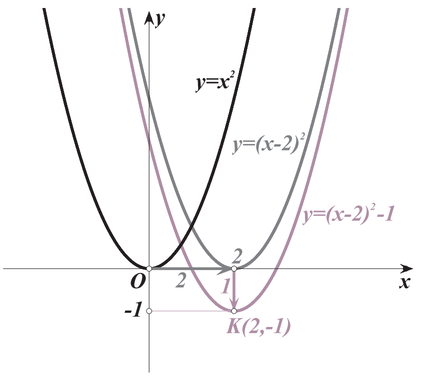
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. Ανδρεαδάκης Β. Κατσαργύρης Σ. Παπασταυρίδης
Γ. Πολύζος Α. Σβέρκος Λ. Αδαμόπουλος Χ. Δαμιανού

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Η συγγραφή και η επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

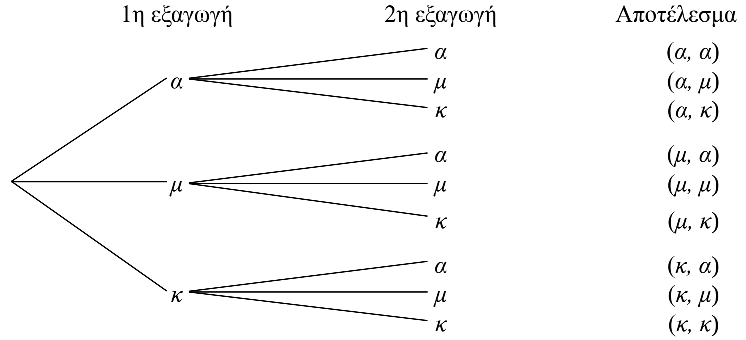
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 1.1. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως.
Έχουμε:
i)

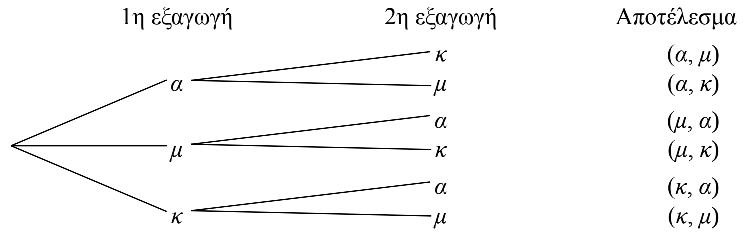


$\Omega = \{(\alpha, \alpha), (\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \mu), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}$

ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu), (\kappa, \kappa)\}$

iii) $\{(\alpha, \alpha), (\mu, \mu), (\kappa, \kappa)\}$.

2. i)



$\Omega = \{(\alpha, \mu), (\alpha, \kappa), (\mu, \alpha), (\mu, \kappa), (\kappa, \alpha), (\kappa, \mu)\}$

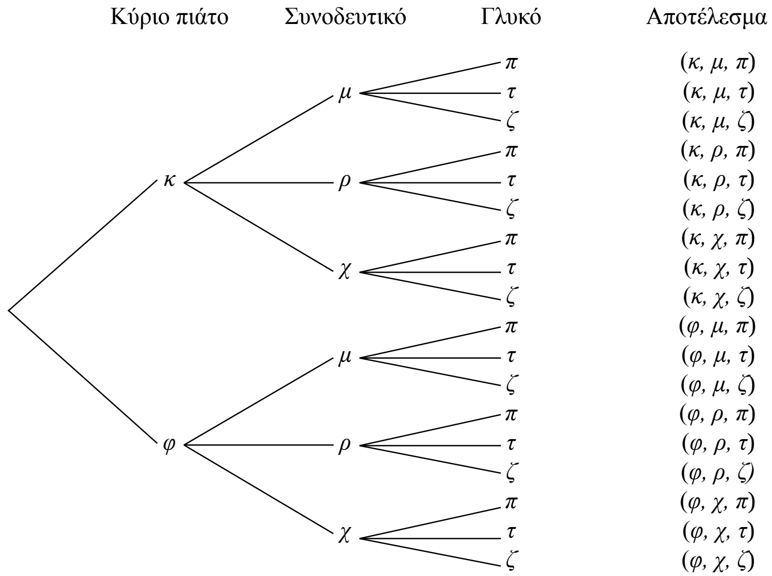
ii) $\{(\kappa, \alpha), (\kappa, \mu)\}$

iii) $\varnothing$.

3. i) $\Omega = \{$(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αυτοκίνητο), (Μακεδονία, τρένο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)$\}$.

ii) $A = \{$(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)$\}$.

4. i) Αν συμβολίσουμε καθεμία από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:



Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης "αποτέλεσμα" αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος:

ii) $A = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi), (\varphi, \mu, \pi), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \chi, \pi)\}$

iii) $B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \mu, \tau), (\kappa, \mu, \zeta), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \zeta), (\kappa, \chi, \pi), (\kappa, \chi, \tau), (\kappa, \chi, \zeta)\}$

iv) $A \cap B = \{(\kappa, \mu, \pi), (\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \chi, \pi)\}$

v) $\Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi), (\kappa, \rho, \tau), (\kappa, \rho, \zeta), (\varphi, \rho, \pi), (\varphi, \rho, \tau), (\varphi, \rho, \zeta)\}$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(\kappa, \rho, \pi)\}$.

5. i) $\Omega = \{(0, \alpha), (0, \beta), (0, \gamma), (0, \delta), (1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$

ii) $A = \{(0, \gamma), (0, \delta)\}$

iii) $B = \{(0, \alpha), (0, \beta), (1, \alpha), (1, \beta)\}$

iv) $\Gamma = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \gamma), (1, \delta)\}$.

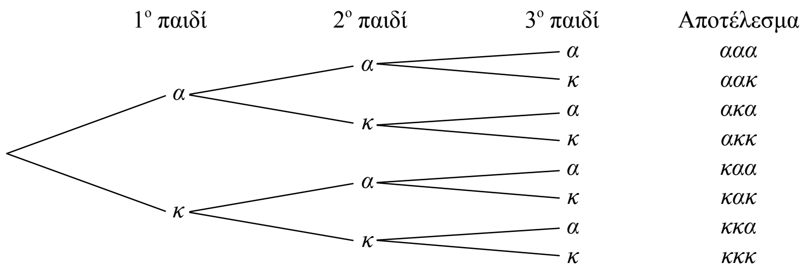
6. i) $A = \{3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \varnothing$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

ii) Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$, δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

iii) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \emptyset$.

iv) $A \cap B = \emptyset$, άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.

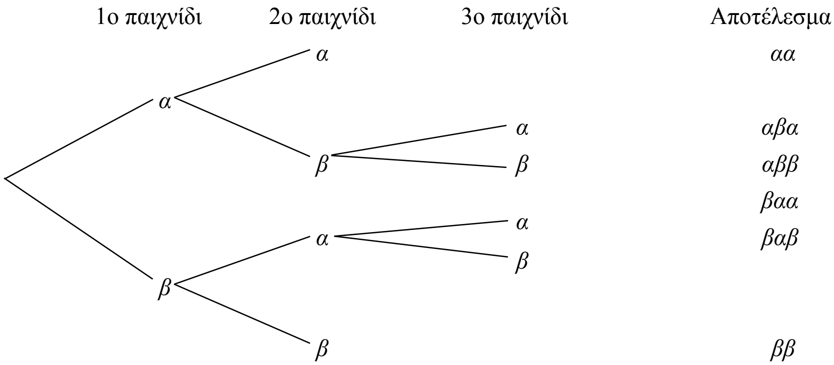
7.



$\Omega = \{ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ\}.$

B΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.



$\Omega = \{αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ\}.$

2. Τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα
$A = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$.
$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$.
$\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$.
$A \cap B = \{(3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)\}$.
$A \cap \Gamma = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.
$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(3, 1)\}$.

§ 1.2. Έννοια της πιθανότητας

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η τράπουλα έχει 4 πεντάρια και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{4}{52} = \mathbf{\frac{1}{13}}$.

ii) Το ενδεχόμενο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \mathbf{\frac{12}{13}}$.

2. Αν Γ το αποτέλεσμα «γράμματα» και K το αποτέλεσμα «κεφαλή», ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega = \{K\Gamma, \Gamma K, KK, \Gamma\Gamma\}$ και υπάρχει μια ευνοϊκή περίπτωση, η $\Gamma\Gamma$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

3. Το κουτί έχει συνολικά 10 + 15 + 5 + 10 = 40 μπάλες.

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \mathbf{\frac{25}{40}}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40} = \mathbf{\frac{25}{40}}$.

4. Η τάξη έχει συνολικά 4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30 μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώσει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\mathbf{\frac{9}{30}}$.

5. Έχουμε $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $A = \{12, 15, 18\}$ και $B = \{12, 16, 20\}$. Επομένως

i) $P(A) = \mathbf{\frac{3}{11}}$. ii) Έχουμε $P(B) = \frac{3}{11}$, άρα $P(B') = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$.

6. Αν Λ, Π και N είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντιστοίχως, τότε $P(\Lambda) = \frac{30}{100}$, $P(\Pi) = \frac{20}{100}$ και $P(N) = \frac{40}{100}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

i) $P(\Lambda \cup \Pi) = P(\Lambda) + P(\Pi) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100}$, δηλαδή **50%**.

ii) $P(\Lambda \cup N)' = 1 - P(\Lambda \cup N) = 1 - P(\Lambda) - P(N) = 1 - \frac{30}{100} - \frac{40}{100} = \frac{30}{100}$,

δηλαδή **30%**.

7. Έχουμε διαδοχικά $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$$\frac{17}{30} + \frac{7}{15} - P(A \cap B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cap B) = \frac{17}{30} + \frac{7}{15} - \frac{2}{3} = \frac{17}{30} + \frac{14}{30} - \frac{20}{30} = \mathbf{\frac{11}{30}}.$$

8. Έχουμε διαδοχικά $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$$\frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$P(B) = \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}.$$

9. Έχουμε διαδοχικά $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B)$

$$2P(A) - 0,2 = 0,6$$

$$2P(A) = 0,8$$

$$\boldsymbol{P(A) = 0,4}.$$

10. Έχουμε διαδοχικά $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$= \frac{6}{12} + \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

11. Έχουμε

$$P(A \cup B) \le P(A) + P(B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le P(A) + P(B)$$

$$\Leftrightarrow 0 \le P(A \cap B) \text{ που ισχύει.}$$

12. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V.

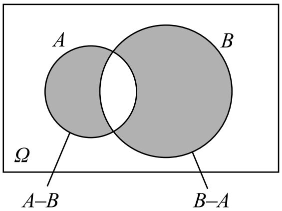
Έχουμε $P(A) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{55}{100}$, $P(A \cap B) = \frac{15}{100}$. Επομένως

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{25}{100} + \frac{55}{100} - \frac{15}{100} = \frac{65}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{65\%}.$$

13. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και B το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο.
Έχουμε

$$P(A) = \frac{10}{100}, \quad P(B) = \frac{6}{100} \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = \frac{2}{100}.$$



α) Έχουμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{14\%}.$$

β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A - B) \cup (B - A)$. Τα ενδεχόμενα $(A - B)$ και $(B - A)$ είναι ασυμβίβαστα. Επομένως

$$P\big((A - B) \cup (B - A)\big) = P(A - B) + P(B - A)$$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) + 2P(A \cap B)$$

$$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{4}{100} = \frac{12}{100}, \text{ δηλαδή } \mathbf{12\%}.$$

14. Έστω A το ενδεχόμενο να μαθαίνει αγγλικά και B το ενδεχόμενο να μαθαίνει γαλλικά.

Έχουμε $P(A)=\frac{80}{100}$, $P(B)=\frac{30}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{20}{100}$.

Άρα
$$\begin{aligned}P\big((A\cup B)'\big)&=1-P(A\cup B)\\&=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)\\&=1-\frac{80}{100}-\frac{30}{100}+\frac{20}{100}=\frac{10}{100}\end{aligned}$$
, δηλαδή **10%**.

B΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\boldsymbol{\kappa+\lambda-\mu}$

ii) $P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=\mathbf{1}-\boldsymbol{\kappa-\lambda+\mu}$

iii)
$$\begin{aligned}P\big((A-B)\cup(B-A)\big)&=P(A-B)+P(B-A)\\&=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)\\&=\boldsymbol{\kappa+\lambda-2\mu}.\end{aligned}$$

2. Αν A και B τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο αντιστοίχως, θα είναι $P(A)=\frac{15}{100}$ και $P(B)=\frac{40}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{10}{100}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$\begin{aligned}P\big((A\cup B)'\big)&=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]\\&=1-\left(\frac{15}{100}+\frac{40}{100}-\frac{10}{100}\right)=1-\frac{45}{100}=\frac{55}{100}\end{aligned}$$
, δηλαδή **55%.**

3. Έχουμε διαδοχικά $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4}$

$$\frac{P(A)}{1-P(A)}=\frac{3}{4}$$

$$4P(A)=3-3P(A)$$

$$7P(A)=3,$$

$$P(A)=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}},\ P(A')=1-P(A)=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}.$$

4. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$, όπου $0<x<1$.

Έχουμε $\dfrac{1}{P(A)}+\dfrac{1}{P(A')}\geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}\geq 4$

$$\Leftrightarrow 1-x+x\geq 4x(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 1-x+x\geq 4x-4x^2$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)^2\geq 0$$ που ισχύει.

5. • Έχουμε $A\cap B\subseteq A$

$$P(A\cap B)\leq P(A)$$

$$(A\cap B)\leq 0,6 \qquad (1)$$

• Έχουμε $P(A\cup B)\leq 1$

$$P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1$$

$$0,6+0,7-P(A\cap B)\leq 1$$

$$0,6+0,7-1\leq P(A\cap B)$$

$$0,3\leq P(A\cap B) \qquad (2)$$

από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$0,3\leq P(A\cap B)\leq 0,6.$$

6. $P(B)-P(A')\leq P(A\cap B)\Leftrightarrow P(B)-1+P(A)\leq P(A\cap B)$

$$\Leftrightarrow P(B)+P(A)-P(A\cap B)\leq 1$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B)\leq 1$$ που ισχύει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 2.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

i) $A = \dfrac{(xy^3)^4}{(x^2y^3)^2} : \left(\dfrac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 = \dfrac{x^4y^{12}}{x^4y^6} \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^6 \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^9 \cdot x^9 = (xy)^9$

ii) Για x = 2010 και $y = \dfrac{1}{2010}$ έχουμε x y = 1 οπότε

$A = 1^9 = 1$.

2. Έχουμε $A = \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 : \dfrac{1}{x^3y^7}\right]^2 = \left[\dfrac{x^2}{y^2} \cdot x^3y^7\right]^2 = \left(x^5 \cdot y^5\right)^2 = (xy)^{10}$

Για x = 0,4 και y = − 2,5 είναι xy = − 1 οπότε $A = (-1)^{10} = 1$.

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001-999)(1001+999) = 2 \cdot 2000 = 4.000.$

ii) $99 \cdot 101 = (100-1)(100+1) = 100^2 - 1 = 10000 - 1 = 9.999.$

iii) $\dfrac{(7,23)^2 - (4,23)^2}{11,46} = \dfrac{(7,23+4,23)(7,23-4,23)}{11,46} = \dfrac{11,46 \cdot 3}{11,46} = 3$

4. i) Έχουμε

$$(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 4\alpha\beta$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i):

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999}\right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999}\right)^2 = 4\frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{999} = 4$$

5. i) Έχουμε

$$\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^2-(\alpha^2-1)=\alpha^2-\alpha^2+1=1$$

ii) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα (i) για α = 1,3265 η τιμή που προκύπτει για την παράσταση είναι 1.

6. Έστω ν και ν + 1 δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί:
Τότε έχουμε

$$(\nu+1)^2-\nu^2=(\nu+1-\nu)(\nu+1+\nu)=(\nu+1)+\nu$$

7. Ισχύει

$$2^\nu+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}=2^\nu(1+2+2^2)=2^\nu\cdot 7$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή
Έχουμε

i) $$\frac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-1}=\alpha-1$$

ii) $$\frac{\alpha^2-\alpha+2\alpha-2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha(\alpha-1)+2(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

2. Έχουμε

i) $$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}=\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha+1)^3}$$

$$=\frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}=(\alpha-1)^2$$

ii) $$\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}=1$$

3. Έχουμε

i) $$(x+y)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-2}=(x+y)^2\left(\frac{y+x}{xy}\right)^{-2}=(x+y)^2\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2=(xy)^2=x^2y^2$$

ii) $$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{\frac{y\quad x}{xy}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{xy}{x-y}$$

4. Έχουμε $$\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}:\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=1$$

5. i) <u>α΄ τρόπος</u>: Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. 26) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>β΄ τρόπος</u>: Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha=k\beta,\ \beta=k\gamma\ \text{ και }\ \gamma=k\alpha \qquad (1)$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma)$$

οπότε έχουμε $k = 1$ (αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

<u>γ΄ τρόπος</u>: Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε $\alpha\beta\gamma = k^3(\alpha\beta\gamma)$ και, επειδή $\alpha\beta\gamma\neq 0$, θα είναι $k^3=1$ και άρα $k = 1$. Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

<u>Σχόλιο</u>: Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.