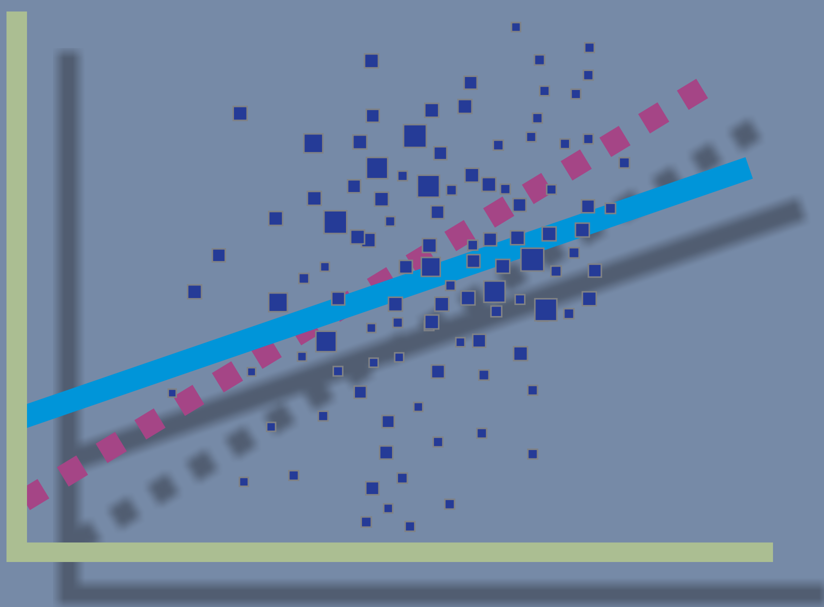
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Η συγγραφή και η επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

Αδαμόπουλος Λεωνίδας	Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου
Δαμιανού Χαράλαμπος	Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Σβέρκος Ανδρέας	Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής	Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών
Μακρής Κωνσταντίνος	Σχολικός Σύμβουλος
Τσικαλουδάκης Γεώργιος	Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης
Γλωσσική Επιμέλεια:	Μπουσούνη Λία Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης
Δακτυλογράφηση:	Μπολιώτη Πόπη
Σχήματα:	Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Γενικής Παιδείας της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή αρχίζει από το σχολικό έτος 1999-2000. Απευθύνεται σε όλους τους μαθητές ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που ακολουθούν. Γι'αυτό περιορίσαμε σημαντικά στο βιβλίο τους αυστηρούς ορισμούς και τις αποδείξεις και το εμπλουτίσαμε με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα ενδιαφέροντα όλων των μαθητών. Επίσης καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε, να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στο χρόνο που προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα. Το βιβλίο αποτελείται από τρία κεφάλαια.

- Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της παραγώγου. Για τον ορισμό της λαμβάνεται υπόψη η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Έτσι, προηγείται το πρόβλημα του καθορισμού της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της και του προσδιορισμού της στιγμιαίας ταχύτητας ενός σώματος. Οι βασικές ιδιότητες της παραγώγου σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης παρουσιάζονται εποπτικά με τη βοήθεια κατάλληλων παραδειγμάτων.
- Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται συστηματικότερα τα στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής που γνώρισαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο, τα οποία συμπληρώνονται με μερικές χρήσιμες ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς καθώς και με την παλινδρόμηση και τη γραμμική συσχέτιση δύο μεταβλητών. Η παρουσίαση των εννοιών και της μεθοδολογίας της Στατιστικής, όπως άλλωστε επιβάλλεται από τη φύση της, είναι πιο αναλυτική από ό,τι στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία.
- Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων και στις σχετιζόμενες με αυτήν μεθόδους απαρίθμησης. Η απόδειξη των ιδιοτήτων της πιθανότητας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο στην περίπτωση που τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ασχολείται με καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαιότητα, και αυτό την κάνει ιδιαίτερα σημαντική στις εφαρμογές της καθημερινής ζωής.

Τα οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο από συναδέλφους, από μαθητές και από κάθε πολίτη που ενδιαφέρεται για τα ζητήματα της παιδείας θα είναι ιδιαίτερα ευπρόσδεκτα από τη συγγραφική ομάδα. Παρακαλούμε να αποσταλούν στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310 Αγία Παρασκευή.

Μάρτιος 1999

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

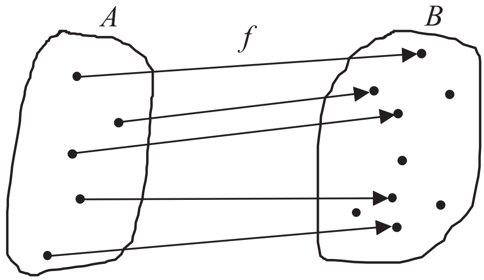
Εισαγωγή

Στο χώρο της επιστήμης το 17ο αιώνα κυριαρχούσε η μελέτη της κίνησης των ουράνιων σωμάτων, καθώς και η μελέτη της κίνησης ενός σώματος πάνω ή κοντά στη Γη. Στη μελέτη αυτή προφανώς σημαντικό ρόλο έπαιζε ο προσδιορισμός του μέτρου της ταχύτητας και της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν η θέση του σώματος μια χρονική στιγμή t εκφράζεται με τη συνάρτηση $x = f(t)$, τότε ο προσδιορισμός του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t ανάγεται στον προσδιορισμό του *ρυθμού μεταβολής* της $x = f(t)$ ως προς t ή, όπως ονομάστηκε αργότερα, *της παραγώγου της* $x = f(t)$. Έτσι, προβλήματα σχετικά με την κίνηση ενός σώματος, καθώς και άλλα που θα συναντήσουμε αργότερα, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642-1727) και Leibniz (1646-1716), οι οποίοι εισήγαγαν τη γενική έννοια της "παραγώγου" και του "διαφορικού", βελτίωσαν τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού και τις χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων της Γεωμετρίας και της Μηχανικής. Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δε σταμάτησε το 17ο αιώνα, αλλά συνεχίστηκε το 18ο αιώνα με τη σημαντική συμβολή των αδελφών Jacob Bernoulli (1654-1705) και Johann Bernoulli (1667-1748), του Euler (1707-1783), κορυφαίου μαθηματικού της εποχής, του Lagrange (1736-1813) και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα όπως του Bolzano (1781-1848), του Cauchy (1789-1857) και του Weierstrass (1815-1897).

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός Συνάρτησης

Είδαμε σε προηγούμενες τάξεις ότι συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B.



1

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο A, που λέγεται *πεδίο ορισμού* της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το B συμπίπτει με το R. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε “y ίσον f του x”. Το $f(x)$ λέγεται **τιμή της f στο x**. Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του A, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Σε μια συνάρτηση συνήθως η τιμή της εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο, για παράδειγμα $f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Σ’αυτή την περίπτωση λέμε: “η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{1-x^2}$” ή “η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$” ή “η συνάρτηση $y = \sqrt{1-x^2}$” ή, απλούστερα, “ η συνάρτηση $\sqrt{1-x^2}$”.

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το “ευρύτερο” υποσύνολο του R στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $1 - x^2 \geq 0$, δηλαδή το διάστημα $\Delta = [-1,1]$, η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{3}{x-2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \mathbf{R} - \{2\}$, δηλαδή το $\mathbf{R}$ χωρίς το 2, ενώ η συνάρτηση $h(x) = 3x - 1$ έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο $\mathbf{R}$ των πραγματικών αριθμών.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα x και y για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ και $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S=f+g$, με $S(x)=f(x)+g(x)$, $x\in A$
- Η διαφορά $D=f-g$, με $D(x)=f(x)-g(x)$, $x\in A$
- Το γινόμενο $P=f\cdot g$, με $P(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x\in A$ και
- Το πηλίκο $R=\frac{f}{g}$, με $R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x\in A$ και $g(x)\neq 0$.

Για παράδειγμα, αν $f(x)=x^2-1$ και $g(x)=x+1$, τότε

$$S(x)=x^2-1+x+1=x(x+1)$$

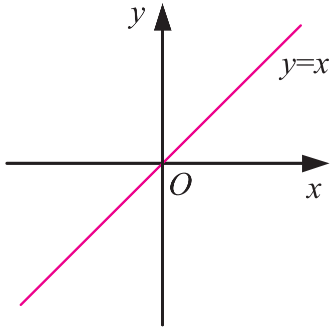
$$D(x)=x^2-1-x-1=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

$$P(x)=(x^2-1)(x+1)=(x+1)^2(x-1)$$

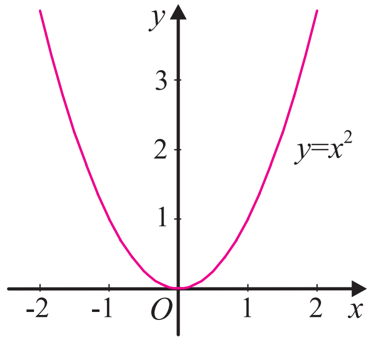
$$R(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-1}{x+1}=x-1,\ \text{όπου}\ x\neq -1.$$

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

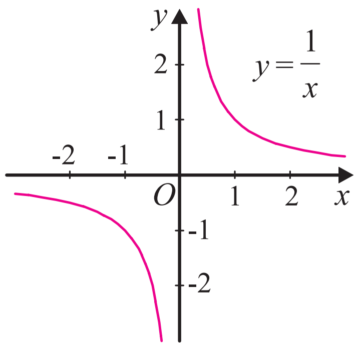
Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Όπως είδαμε σε προηγούμενες τάξεις **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη της** f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x\in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y=f(x)$. Η εξίσωση λοιπόν $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f**.
Είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις .



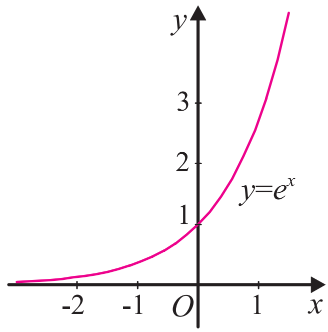
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



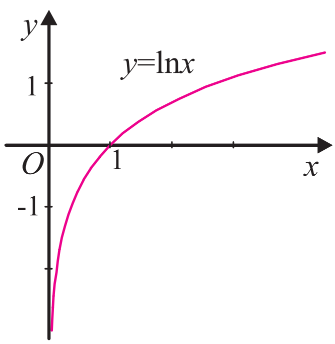
(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=x^2$ είναι μια *παραβολή*.



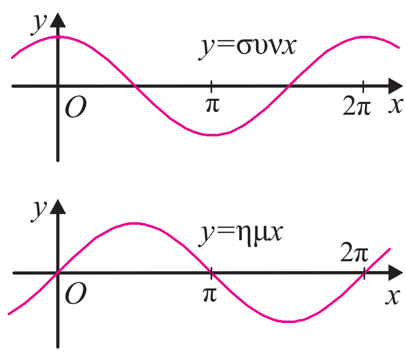
(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι μια *υπερβολή*.



(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x)=e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα $x'x$, αφού $e^x>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.



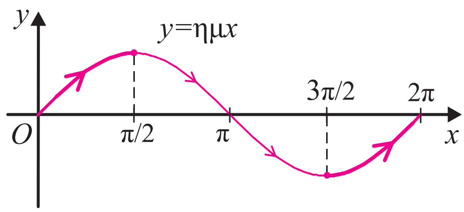
(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x)=\ln x$ είναι “δεξιά” του άξονα yy', αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x>0$.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x)=\text{ημ}x$ και $g(x)=\text{συν}x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π.

Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ υπάρχει μια διακοπή στο σημείο $x=0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει το μηδέν.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης



3

• Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\text{ημ}x$, $x\in[0,2\pi]$ προκύπτει αμέσως ότι για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$ είναι $\text{ημ}x_1<\text{ημ}x_2$. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(\text{x})=\text{ημ}x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Το ίδιο συμβαίνει και στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$. Όμως για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1<x_2$, παρατηρούμε ότι $\text{ημ}x_1>\text{ημ}x_2$.

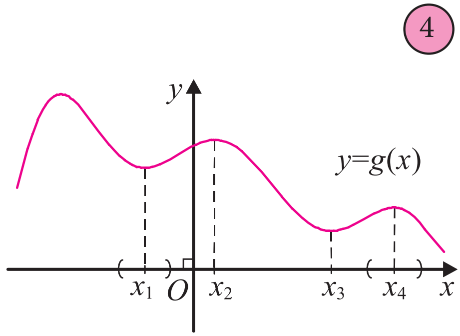
Λέμε σ'αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση $f(x)=\text{ημ}x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$. Γενικά:

> Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, $x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία x_1, $x_2\in\Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

• Ακόμη, για την παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε ότι για κάθε

$x \in [0, 2\pi]$ είναι $ημx \le 1 = ημ\dfrac{\pi}{2}$ και $ημx \ge -1 = ημ\dfrac{3\pi}{2}$. Δηλαδή, όπως λέμε, η συνάρτηση $f(x) = ημx$ έχει *ολικό μέγιστο* (maximum) για $x = \dfrac{\pi}{2}$ και *ολικό ελάχιστο* (minimum) για $x = \dfrac{3\pi}{2}$.



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g του σχήματος 4 προκύπτει ότι για $x = x_1$ η τιμή της g είναι μικρότερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια **περιοχή** του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_1 *τοπικό ελάχιστο*. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_3$. Οι τιμές $g(x_1)$ και $g(x_3)$ λέγονται *τοπικά ελάχιστα* της συνάρτησης. Επίσης, για $x = x_4$ η τιμή $g(x_4)$ είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε μια περιοχή του x_4. Λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_4 *τοπικό μέγιστο*. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_2$. Οι τιμές $g(x_2)$ και $g(x_4)$ λέγονται *τοπικά μέγιστα* της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Για παράδειγμα, το τοπικό ελάχιστο $g(x_1)$ είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο $g(x_4)$.
Γενικά:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:
Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \le f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και **τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \ge f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της συνάρτησης.

Όριο Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.

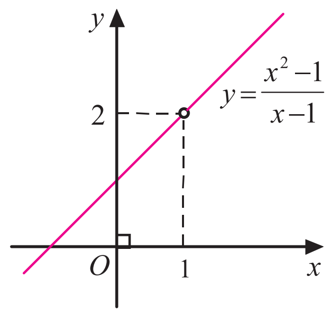
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του $f(x)$ για τιμές του x κοντά στο 1.

$x<1$	$f(x)$	$x>1$	$f(x)$
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το $f(x)$ παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1,$$

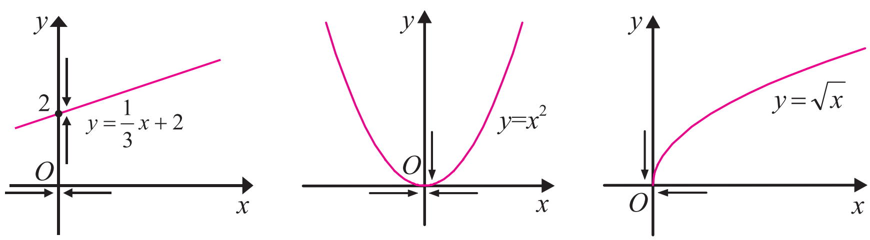
5



οπότε όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 ($x \to 1$), τότε το $f(x)=x+1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 ($x+1 \to 2$). Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim_{x\to 1} f(x)=2$.

Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0, που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0. Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x+2$, που είναι ορισμένη στο R. Παρατηρούμε ότι όταν $x \to 0$, το $f(x) \to 2$, δηλαδή $\lim_{x\to 0} f(x)=2$. Ομοίως, $\lim_{x\to 0} x^2=0$ και $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}=0$.

6



(α) (β) (γ)