ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Η συγγραφή και η επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Γ΄ Τάξη Γενικού Λυκείου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ

Το τεύχος που κρατάς έχει μια ιδιομορφία: σου δίνεται με τη σύσταση να μη το διαβάσεις· τουλάχιστο με την έννοια που διαβάζεις ένα άλλο βιβλίο για να κατανοήσεις το περιεχόμενό του.

Πράγματι, οι ασκήσεις που σου δίνει ο καθηγητής σου είναι για να εργαστείς μόνος. Γιατί το να λύσεις μια άσκηση σημαίνει πολλές φορές όχι μόνο ότι έχεις κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη αλλά και ότι ξέρεις να τη χρησιμοποιήσεις για να δημιουργείς, να ανακαλύπτεις ή να επιβεβαιώνεις κάτι καινούργιο. Και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για σένα τον ίδιο. Δεν μπορεί παρά να έχεις και συ τη φιλοδοξία να λύνεις μόνος χωρίς βοήθεια τις ασκήσεις, για να νιώθεις τη χαρά αυτής της δημιουργίας, της ανακάλυψης.

Πρέπει να ξέρεις ότι όταν δυσκολεύεσαι στη λύση μιας άσκησης, τις πιο πολλές φορές υπάρχει κάποιο κενό στη γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Πήγαινε πίσω λοιπόν στο διδακτικό βιβλίο κάθε φορά που χρειάζεται να εντοπίσεις και να συμπληρώσεις τέτοια κενά. Οπωσδήποτε πριν καταπιαστείς με τη λύση των ασκήσεων πρέπει να αισθάνεσαι κάτοχος της θεωρίας που διδάχτηκες.

Εκτός από την κατανόηση της θεωρίας μπορεί να βοηθηθείς στη λύση μιας άσκησης από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές που περιέχει το διδακτικό σου βιβλίο. Αν παρόλ' αυτά δε μπορείς να προχωρήσεις, στο τέλος του βιβλίου σου θα βρεις μια σύντομη υπόδειξη που ασφαλώς θα σε διευκολύνει.

Στις ελάχιστες περιπτώσεις που έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας δε βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης τότε και μόνο τότε μπορείς να καταφύγεις σ' αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος.

Ουσιαστικά λοιπόν δεν το 'χεις ανάγκη αυτό το τεύχος. Σου παρέχεται όμως για τους εξής λόγους:

α) Για να μπορείς να συγκρίνεις τις λύσεις που εσύ βρήκες.

β) Για να σε προφυλάξει από ανεύθυνα «λυσάρια».

γ) Για να απαλλάξει τους γονείς σου από αντίστοιχη οικονομική επιβάρυνση.

δ) Για να έχεις εσύ και οι συμμαθητές σου την ίδια συλλογή ασκήσεων που είναι έτσι επιλεγμένες ώστε να εξασφαλίζουν την εμπέδωση της ύλης.

ε) Για να εργάζεσαι χωρίς το άγχος να εξασφαλίσεις οπωσδήποτε για κάθε μάθημα τις λύσεις των ασκήσεων.

Το τεύχος που κρατάς είναι λοιπόν φίλος. Να του συμπεριφέρεσαι όπως σ' έναν φίλο που έχει δει πριν από σένα την ταινία που πρόκειται να δεις· μη του επιτρέψεις να σου αποκαλύψει την «υπόθεση» πριν δεις και συ το έργο. Μετά μπορείτε, να συζητήσετε. Η σύγκριση των συμπερασμάτων θα είναι ενδιαφέρουσα και προπαντός επωφελής.

(Από το Τμήμα Μ.Ε. του Π.Ι.)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. $f(1)=1^3-3\cdot 1=1-3=-\mathbf{2}$

$f(2)=2^3-3\cdot 2=8-6=\mathbf{2}$

$f(-1)=(-1)^3-3(-1)=-1+3=\mathbf{2}$.

2. $\varphi(0)=\mathbf{6}$

$\varphi(1)=1-5+6=\mathbf{2}$.

Έχουμε διαδοχικά: $\varphi(t)=0$

$t^2-5t+6=0$

$t=\dfrac{5\pm 1}{2}$

$\boldsymbol{t=2}$ ή $\boldsymbol{t=3}$.

3. $h(0)=\text{συν}0-\text{ημ}0=1-0=\mathbf{1}$

$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\text{συν}\dfrac{\pi}{2}-\text{ημ}\dfrac{\pi}{2}=0-1=-\mathbf{1}$.

Έχουμε διαδοχικά: $h(\theta)=0$

$\text{συν}\theta-\text{ημ}\theta=0$

$\text{ημ}\theta=\text{συν}\theta$

$\text{εφ}\theta=1$

$\theta=\dfrac{\pi}{\mathbf{4}}$ ή $\theta=\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{4}}$.

4. $f(1)=\dfrac{1}{2}\ln 1^2=\dfrac{1}{2}\cdot 0=\mathbf{0}$

$f(e)=\dfrac{1}{2}\ln e^2=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\ln e=\mathbf{1}$.

5. Πρέπει $(x-1)(x-2) \neq 0$ ή ισοδύναμα $x \neq 1$ και $x \neq 2$.

Άρα $\boldsymbol{A = \mathbf{R} - \{1, 2\}}$.

6. • Έχουμε διαδοχικά

$$f(x) < 0$$

$$(x-3)(x-7) < 0$$

$$\boldsymbol{3 < x < 7}.$$

• Πρέπει $(x-3)(x-7) \geq 0$, οπότε $x \leq 3$ ή $x \geq 7$.

Άρα $\boldsymbol{A = (-\infty, 3] \cup [7, +\infty)}$.

7. $f(x) + g(x) = 3x^2 - 2x - 1 + 2x - 1 = \mathbf{3x^2 - 2}$

$f(x) \cdot g(x) = (3x^2 - 2x - 1)(2x - 1)$

$= 6x^3 - 3x^2 - 4x^2 + 2x - 2x + 1 = \mathbf{6x^3 - 7x^2 + 1}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\mathbf{3x^2 - 2x - 1}}{\mathbf{2x - 1}}$, $\boldsymbol{x \neq \dfrac{1}{2}}$.

8. Έχουμε

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 - 3x + 4) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 4 = \mathbf{4}$

ii) $\lim\limits_{x\to -2} = [(2x-1)(x+4)] = (-4-1)(-2+4) = -5 \cdot 2 = \mathbf{-10}$

iii) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{4} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} = 2 + \dfrac{1}{2} = \mathbf{\dfrac{5}{2}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x) = 2 \cdot \eta\mu 0 + 3 \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = \mathbf{3}$

v) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(3\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 3 \cdot \eta\mu\dfrac{\pi}{4} + \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4} = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$.

9. Έχουμε

i) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 - 4}{3(x-2)} = \dfrac{(-2)^2 - 4}{3(-2-2)} = \dfrac{4-4}{-12} = \dfrac{0}{-12} = \mathbf{0}$

ii) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2}{x^2 + 1} = \dfrac{5(-1)^2}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{5}{1+1} = \mathbf{\dfrac{5}{2}}$

iii) $\lim\limits_{x\to 0}[(x+1)\sigma\upsilon\nu x] = (0+1) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = \mathbf{1}$

iv) Για $x \neq 4$ έχουμε $\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x-4)(x+4)}{x-4}=x+4$ και επομένως

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x+4)=4+4=\mathbf{8}.$$

v) Για $x \neq -5$ έχουμε $\frac{x^2-25}{x+5}=\frac{(x+5)(x-5)}{x+5}=x-5$ και επομένως

$$\lim_{x\to -5}\frac{x^2-25}{x+5}=\lim_{x\to -5}(x-5)=-5-5=\mathbf{-10}.$$

vi) Για $x \neq 2$ έχουμε $\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\frac{(2x+1)(x-2)}{x-2}=2x+1$ και επομένως

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(2x+1)=2\cdot 2+1=4+1=\mathbf{5}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $$f(x)+f(-x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}$$

$$=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

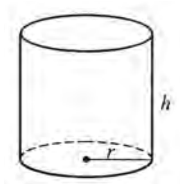
$$=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\mathbf{1}.$$

2. Αφού οι τρεις πλευρές του ορθογώνιου που θα περιφραχτούν έχουν μήκος 100m και η μια πλευρά του είναι *x*, η άλλη πλευρά του θα είναι $\frac{100-x}{2}=50-\frac{x}{2}$ και το εμβαδόν του θα είναι $E(x)=x\left(50-\frac{x}{2}\right)$ με $0<x<100$.

3. • Το μήκος της βάσης του κυλίνδρου είναι $2\pi r$ και σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε $2\pi r + h = 20$. (1)

Ο όγκος του κυλίνδρου είναι $V = \pi r^2 \cdot h$. (2)

Από την (1) έχουμε $r = \dfrac{20-h}{2\pi}$, οπότε η (2) γίνεται

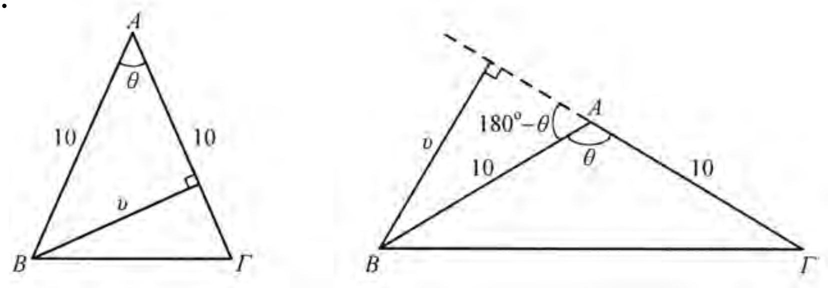


$$V = \pi\left(\frac{20-h}{2\pi}\right)^2 \cdot h, \text{ άρα } \boldsymbol{V(h) = \pi\left(\frac{20-h}{2\pi}\right)^2 \cdot h} \text{ με } \mathbf{0 < h < 20}.$$

• Η επιφάνεια του ανοικτού κυλίνδρου είναι $E = \pi r^2 + 2\pi r \cdot h$. Όμως $h = 20 - 2\pi r$, οπότε $E(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot (20 - 2\pi r)$, με $r > 0$ και $20 - 2\pi r > 0$, δηλαδή $0 < r < \dfrac{10}{\pi}$.

Άρα $\boldsymbol{E(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot (20 - 2\pi r)}$, $\boldsymbol{0 < r < \dfrac{10}{\pi}}$.

4.



• Αν η γωνία θ είναι οξεία ή αμβλεία έχουμε ημ$\theta = \dfrac{\upsilon}{10}$ ή ημ$(180^\circ - \theta) = \dfrac{\upsilon}{10}$ αντιστοίχως, οπότε σε κάθε περίπτωση ισχύει ημ$\theta = \dfrac{\upsilon}{10}$, άρα $\boldsymbol{\upsilon = 10 \cdot}$ **ημ**$\boldsymbol{\theta}$. (1)

• Έχουμε $E(\theta) = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot \upsilon = \dfrac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot$ ημθ ή $\boldsymbol{E(\theta) = 50}$ **ημ**$\boldsymbol{\theta}$. (2)

Οι τύποι (1), (2) ισχύουν και στην περίπτωση που $\theta = 90^\circ$.

5. i) Για $x \neq 5$ έχουμε $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$, οπότε

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{5}} = \mathbf{\frac{1}{2\sqrt{5}}}.$$

ii) Για $h \neq 0$ έχουμε

$$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{(1+h)-1}=\frac{\sqrt{1+h}-1}{\left(\sqrt{1+h}-1\right)\left(\sqrt{1+h}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}\text{, οπότε}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}\,.$$

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) • $f(3+h)-f(3)=3(3+h)+1-(3\cdot 3+1)=9+3h+1-9-1=3h$

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{3h}{h}=3.$

• Άρα $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}3=\mathbf{3.}$

ii) • $g(-2+h)-g(-2)=(-2+h)^2+5-[(-2)^2+5]$

$$=4+h^2-4h+5-4-5=h(h-4).$$

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=\dfrac{h(h-4)}{h}=h-4.$

• Άρα $g'(-2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(-2+h)-g(-2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h-4)=\mathbf{-4.}$

iii)• $\sigma(4+h)-\sigma(4)=(4+h)^2+2(4+h)-(4^2+2\cdot 4)$

$$=16+8h+h^2+8+2h-16-8=h^2+10h=h(h+10).$$

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{\sigma(4+h)-\sigma(4)}{h}=\dfrac{h(h+10)}{h}=h+10.$

• Άρα $\sigma'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sigma(4+h)-\sigma(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(h+10)=\mathbf{10.}$

2. • $f(1+h)-f(1)=\dfrac{1}{1+h+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2+h}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{h}{2(2+h)}\,.$

• Για $h \neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\dfrac{1}{h}\cdot\left[-\dfrac{h}{2(2+h)}\right]=-\dfrac{1}{2(2+h)}\,.$

• Άρα $f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[-\dfrac{1}{2(2+h)}\right]=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

3. i) Έχουμε $L(r)=2\pi r$

• $L(3+h)-L(3)=2\pi(3+h)-2\pi\cdot 3=6\pi+2\pi h-6\pi=2\pi h.$

• Για $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{L(3+h)-L(3)}{h}=\dfrac{2\pi h}{h}=2\pi.$

• Άρα $L'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{L(3+h)-L(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}2\pi=\boldsymbol{2\pi}.$

ii) Έχουμε $E(r)=\pi r^2$

• $E(2+h)-E(2)=\pi(2+h)^2-\pi\cdot 2^2=\pi(4+4h+h^2-4)=\pi(4+h)h.$

• Για $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{E(2+h)-E(2)}{h}=\dfrac{\pi(4+h)h}{h}=\pi(4+h).$

• Άρα $E'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(2+h)-E(2)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\pi(4+h)=\boldsymbol{4\pi}.$

4. i) Έχουμε $E(x)=x^2$

• $E(5+h)-E(5)=(5+h)^2-5^2=25+10h+h^2-25=h(10+h).$

• Για $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{E(5+h)-E(5)}{h}=\dfrac{h(10+h)}{h}=10+h.$

• Άρα $E'(5)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{E(5+h)-E(5)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(10+h)=\mathbf{10}.$

ii) Έχουμε $V(x)=x^3$

• $V(10+h)-V(10)=(10+h)^3-10^3$

$$=10^3+3\cdot 10^2\cdot h+3\cdot 10\cdot h^2+h^3-10^3$$

$$=h(300+30h+h^2)$$

• Για $h\neq 0$ έχουμε

$$\frac{V(10+h)-V(10)}{h}=\frac{h(300+30h+h^2)}{h}=300+30h+h^2.$$

• Άρα $V'(10)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{V(10+h)-V(10)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(300+30h+h^2)=\mathbf{300}.$

5. i) Πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(3)$.

- $f(3+h)-f(3)=(3+h)^2-3^2=9+6h+h^2-9=h(6+h)$
- Για $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h.$
- Άρα $f'(3)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)=6.$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει τη μορφή

$$y=6x+\beta.$$

Η εφαπτομένη αυτή όμως θα διέρχεται και από το σημείο $A(3,f(3))$, δηλαδή από το $A(3,9)$ και επομένως θα ισχύει $9=6\cdot 3+\beta$, οπότε $\beta=-9$. Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\boldsymbol{y=6x-9}$.

ii) Πρέπει να υπολογίσουμε το $f'(4)$.

- $f(4+h)-f(4)=2\sqrt{4+h}-2\sqrt{4}=2(\sqrt{4+h}-2).$
- Για $h\neq 0$ έχουμε $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\dfrac{2\left(\sqrt{4+h}-2\right)}{h}=2\dfrac{\sqrt{4+h}-2}{(4+h)-4}$

$$=2\frac{\sqrt{4+h}-2}{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}=\frac{2}{\sqrt{4+h}+2}$$

- Άρα $f'(4)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2}{\sqrt{4+h}+2}=\dfrac{2}{\sqrt{4}+2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης θα έχει τη μορφή

$$y=\frac{1}{2}x+\beta.$$

Η εφαπτομένη αυτή όμως θα διέρχεται και από το σημείο $A(4,f(4))$, δηλαδή από το $A(4,4)$ και επομένως θα ισχύει $4=\dfrac{1}{2}\cdot 4+\beta$, οπότε $\beta=2$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x+2}$.

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $(-5)'=0$ ii) $(x^4)'=4x^3$ iii) $(x^9)'=9x^8$.

2. i) $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

ii) $(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}$

iii) $(x^{-5})'=-5x^{-5-1}=-5x^{-6}$.

3. i) $\left(\sqrt[3]{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

ii) $\left(\sqrt[5]{x^2}\right)'=\left(x^{\frac{2}{5}}\right)'=\dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

4. i) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

ii) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)'=\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)'=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}=-\dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

iii) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\right)'=\left(x^{-\frac{2}{5}}\right)'=-\dfrac{2}{5}x^{-\frac{2}{5}-1}=-\dfrac{2}{5}x^{-\frac{7}{5}}=-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^7}}=-\dfrac{2}{5}\dfrac{1}{x\sqrt[5]{x^2}}$.

5. i) $(4x^3)'=4(x^3)'=4\cdot 3x^2=12x^2$

ii) $(6x^{-5})'=6\cdot(x^{-5})'=6\cdot(-5)x^{-6}=-30x^{-6}$

iii) $\left(-\dfrac{2}{5}x^{20}\right)'=-\dfrac{2}{5}\cdot 20\cdot x^{19}=-8x^{19}$.

6. i) $f(x)=\dfrac{-6}{\sqrt[4]{x}}=-6x^{-\frac{1}{4}}$ και επομένως

$$f'(x)=\left(-6x^{-\frac{1}{4}}\right)'=-6\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)'=-6\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot x^{-\frac{1}{4}-1}=\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{4}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}\ .$$

ii) $f(x)=6x\sqrt{x}=6x\cdot x^{\frac{1}{2}}=6x^{\frac{3}{2}}$ και επομένως

$$f'(x)=\left(6x^{\frac{3}{2}}\right)'=6\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=9x^{\frac{1}{2}}=9\sqrt{x}.$$

7. i) $(x^4+3x^2)'=(x^4)'+(3x^2)'=4x^3+6x$

ii) $\left(x^2+5+\dfrac{3}{x}\right)'=(x^2)'+(5)'+\left(\dfrac{3}{x}\right)'=2x+0-\dfrac{3}{x^2}=2x-\dfrac{3}{x^2}$

iii) Έχουμε $\dfrac{x^2+2x-1}{x}=\dfrac{x^2}{x}+\dfrac{2x}{x}-\dfrac{1}{x}=x+2-\dfrac{1}{x}$ και επομένως

$$\left(\frac{x^2+2x-1}{x}\right)'=\left(x+2-\frac{1}{x}\right)'=1+0+\frac{1}{x^2}=1+\frac{1}{x^2}\ .$$

8. i) $(8x^3-\eta\mu x+5)'=(8x^3)'-(\eta\mu x)'+(5)'=24x^2-\sigma\upsilon\nu x$

ii) $[6\ \sigma\upsilon\nu x-8(x^2+x)]'=(6\ \sigma\upsilon\nu x)'-(8(x^2+x))'=-6\ \eta\mu x-8(2x+1)$

9. i)
$$\begin{aligned}\left((x^3+1)(x^4+1)\right)'&=(x^3+1)'(x^4+1)+(x^3+1)(x^4+1)'\\&=3x^2(x^4+1)+4x^3(x^3+1)\\&=3x^6+3x^2+4x^6+4x^3\\&=7x^6+4x^3+3x^2.\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}(\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x))'&=(\eta\mu x)'(1-\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x(1-\sigma\upsilon\nu x)'\\&=\sigma\upsilon\nu x(1-\sigma\upsilon\nu x)+\eta\mu x\cdot\eta\mu x\\&=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x\\&=\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu 2x.\end{aligned}$$

10. i)
$$\begin{aligned}(x\sigma\upsilon\nu x+3(x+1)(x-1))'&=(x\sigma\upsilon\nu x)'+(3(x+1)(x-1))'\\&=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+3(x-1+x+1)\\&=\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x+6x\end{aligned}$$