ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ
λύσεις των ασκήσεων

Σ. Ανδρεαδάκης Β. Κατσαργύρης
Σ. Παπασταυρίδης Γ. Πολύζος Α. Σβέρκος

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

Σ. Ανδρεαδάκης • Β. Κατσαργύρης
Σ. Παπασταυρίδης • Γ. Πολύζος • Α. Σβέρκος

Η συγγραφή και η επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

λύσεις των ασκήσεων

ΑΛΓΕΒΡΑ Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Οι αλλαγές που ενσωματώθηκαν στην παρούσα επανέκδοση έγιναν με βάση τις διορθώσεις του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΤΗ

Το τεύχος που κρατάς έχει μια ιδιομορφία: σου δίνεται με τη σύσταση ν α μ η τ ο δ ι α β ά σ ε ι ς· τουλάχιστο με την έννοια που διαβάζεις ένα άλλο βιβλίο για να κατανοήσεις το περιεχόμενό του.

Πράγματι, οι ασκήσεις που σου δίνει ο καθηγητής σου είναι για να εργαστείς μόνος. Γιατί το να λύσεις μια άσκηση σημαίνει πολλές φορές όχι μόνο ότι έχεις κατανοήσει την αντίστοιχη θεωρητική ύλη αλλά και ότι ξέρεις να τη χρησιμοποιήσεις για να δημιουργείς, να ανακαλύπτεις ή να επιβεβαιώνεις κάτι καινούριο. Και αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για σένα τον ίδιο. Δεν μπορεί παρά να έχεις και εσύ τη φιλοδοξία να λύνεις μόνος, χωρίς βοήθεια, τις ασκήσεις, για να νιώθεις τη χαρά αυτής της δημιουργίας, της ανακάλυψης.

Πρέπει να ξέρεις ότι, όταν δυσκολεύεσαι στη λύση μιας άσκησης, τις πιο πολλές φορές υπάρχει κάποιο κενό στη γνώση της αντίστοιχης θεωρίας. Πήγαινε λοιπόν πίσω στο διδακτικό βιβλίο κάθε φορά που χρειάζεται να εντοπίσεις και να συμπληρώσεις τέτοια κενά. Οπωσδήποτε, πριν καταπιαστείς με τη λύση των ασκήσεων, πρέπει να αισθάνεσαι κάτοχος της θεωρίας που διδάχτηκες.

Εκτός από την κατανόηση της θεωρίας μπορεί να βοηθηθείς στη λύση μιας άσκησης από τα παραδείγματα και τις εφαρμογές που περιέχει το διδακτικό σου βιβλίο. Αν παρ' όλ' αυτά δεν μπορείς να προχωρήσεις, στο τέλος του βιβλίου σου θα βρεις μια σύντομη υπόδειξη που ασφαλώς θα σε διευκολύνει.

Στις ελάχιστες περιπτώσεις που, έχοντας εξαντλήσει κάθε περιθώριο προσπάθειας, δε βρίσκεται η πορεία που οδηγεί στη λύση της άσκησης, τότε και μ ό ν ο τ ό τ ε μπορείς να καταφύγεις σ' αυτό το τεύχος και μάλιστα για να διαβάσεις εκείνο το τμήμα της λύσης που σου είναι απαραίτητο για να συνεχίσεις μόνος.

Ουσιαστικά λοιπόν δεν το 'χεις ανάγκη αυτό το τεύχος. Σου παρέχεται όμως για τους εξής λόγους:

α) Για να μπορείς να συγκρίνεις τις λύσεις που εσύ βρήκες.

β) Για να σε προφυλάξει από ανεύθυνα «λυσάρια».

γ) Για να απαλλάξει τους γονείς σου από αντίστοιχη οικονομική επιβάρυνση.

δ) Για να έχεις εσύ και οι συμμαθητές σου την ίδια συλλογή ασκήσεων που είναι έτσι επιλεγμένες ώστε να εξασφαλίζουν την εμπέδωση της ύλης.

ε) Για να εργάζεσαι χωρίς το άγχος να εξασφαλίσεις οπωσδήποτε για κάθε μάθημα τις λύσεις των ασκήσεων.

Το τεύχος λοιπόν που κρατάς είναι φίλος. Να του συμπεριφέρεσαι όπως σ' ένα φίλο που έχει δει πριν από σένα την ταινία που πρόκειται να δεις: μην του επιτρέψεις να σου αποκαλύψει την «υπόθεση» πριν δεις και εσύ το έργο. Μετά μπορείτε να συζητήσετε. Η σύγκριση των συμπερασμάτων θα είναι ενδιαφέρουσα και προπαντός επωφελής.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

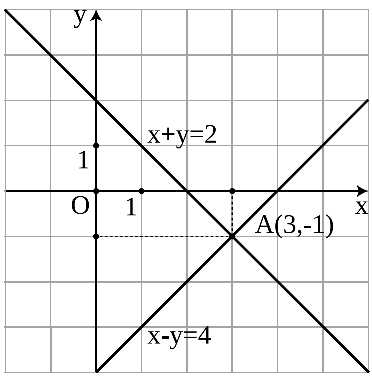
§ 1.1 Γραμμικά συστήματα

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=6 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1. \end{cases}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3,-1)$.

ii)



2. i) $\begin{cases} \dfrac{x}{7}=\dfrac{y}{8} \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x=7y \\ x+y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-7y=0 & (1) \\ x+y=45. & (2) \end{cases}$

Από τη (2) έχουμε $y=45-x$ και με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει
$8x-7(45-x)=0 \Leftrightarrow 8x-315+7x=0 \Leftrightarrow 15x=315 \Leftrightarrow x=21.$
Επομένως $y=45-21=24.$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(21,24)$.

ii) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4} \\ 4x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4=3y-6 \\ 4x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=-2 & (1) \\ 4x+3y=8. & (2) \end{cases}$

Με πρόσθεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $8x=6 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}.$

Με αφαίρεση των (1), (2) κατά μέλη έχουμε $6y=10 \Leftrightarrow y=\dfrac{5}{3}.$

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{3}\right).$

3. i) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x-5}{2}+\frac{2y+1}{7}+2=0 \Leftrightarrow 7(x-5)+2(2y+1)+28=0$$

$$\Leftrightarrow 7x-35+4y+2+28=0 \Leftrightarrow 7x+4y=5.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+6}{3}-\frac{y-6}{2}=8 \Leftrightarrow 2(x+6)-3(y-6)=48 \Leftrightarrow 2x+12-3y+18=48$$

$$\Leftrightarrow 2x-3y=48-30 \Leftrightarrow 2x-3y=18.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{cases} 7x+4y=5 & (1) \\ 2x-3y=18. & (2) \end{cases}$$

Απαλείφουμε το y

$$\begin{array}{lll} 7x+4y=5 & (3) & 21x+12y=15 \\ 2x-3y=18 & (4) & \underline{8x-12y=72} \\ & & 29x=87, \text{ οπότε } x=\dfrac{87}{29}=3. \end{array}$$

Για $x=3$ η (1) γίνεται $7\cdot 3+4y=5 \Leftrightarrow 4y=-21+5 \Leftrightarrow 4y=-16$, οπότε $y=-4$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(3,-4)$.

ii) Η πρώτη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{2x-1}{3}=4-\frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4(2x-1)=12\cdot 4-3(y+2)$$

$$\Leftrightarrow 8x-4=48-3y-6 \Leftrightarrow 8x+3y=46.$$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος γράφεται

$$\frac{x+3}{2}-3=\frac{x-y}{3} \Leftrightarrow 3(x+3)-3\cdot 6=2(x-y)$$

$$\Leftrightarrow 3x+9-18=2x-2y \Leftrightarrow x+2y=9.$$

Έτσι το αρχικό σύστημα γίνεται

$$\begin{cases} 8x+3y=46 & (1) \\ x+2y=9. & (2) \end{cases}$$

Αντικαθιστούμε στην (1) όπου $x=9-2y$ και έχουμε

$8(9-2y)+3y=46 \Leftrightarrow 72-16y+3y=46 \Leftrightarrow 13y=26 \Leftrightarrow y=2$.

Η (2) για $y=2$ γίνεται $x+2\cdot 2=9 \Leftrightarrow x=5$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι το ζεύγος $(5,2)$.

4. i) $\begin{cases} x-3y=3 \\ \dfrac{x}{3}-y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3y=3 \\ x-3y=-6. \end{cases}$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

ii) $\begin{cases} 2y = x + 2 \\ \frac{1}{2}x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -2 \\ x - 2y = -2. \end{cases}$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής $\left(k, \frac{k+2}{2}\right), \quad k \in \mathbb{R}.$

5. i) Έχουμε

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5) - 3 \cdot 1 = -10 - 3 = -13 \neq 0.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 7 - 4 \cdot 1 = -35 - 4 = -39.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 = 8 - 21 = -13.$$

Επομένως $x = \frac{D_x}{D} = \frac{-39}{-13} = 3$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-13}{-13} = 1.$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(3,1)$.

ii) Το σύστημα γράφεται $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + 3y = -1. \end{cases}$

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 2 = 22.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11.$$

Επομένως $x = \frac{D_x}{D} = \frac{22}{11} = 2$ και $y = \frac{D_y}{D} = \frac{-11}{11} = -1.$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση το ζεύγος $(2,-1)$.

6. i) $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 14 + 30 = 44 \neq 0,$ άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση.

ii) $D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0.$ Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 4x - 6y = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 40 \\ 2x - 3y = 40 \end{cases}$$

και επομένως έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

iii) $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 9 = 0.$ Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 3x+y=11 \\ -9x-3y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=11 \\ 3x+y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

και είναι αδύνατο.

7. i) $D=\begin{vmatrix} \sqrt{3}-1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}+1 \end{vmatrix}=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)-2=2-2=0.$

Το σύστημα γράφεται διαδοχικά ισοδύναμα:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2 \\ x+\left(\sqrt{3}+1\right)y=-1-\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2 \\ \left(\sqrt{3}-1\right)x+\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)y=-\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2 \\ \left(\sqrt{3}-1\right)x+2y=-2 \end{cases}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων της μορφής

$$\left(\left(\sqrt{3}+1\right)(k+1),k\right),\quad k\in\mathbb{R}.$$

ii) $D=\begin{vmatrix} \sqrt{3}+1 & 4 \\ \dfrac{1}{2} & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix}=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)-2=2-2=0.$

Το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=7 \\ x+2\left(\sqrt{3}-1\right)y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=7 \\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+2\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)y=2\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=7 \\ \left(\sqrt{3}+1\right)x+4y=2\left(\sqrt{3}+1\right) \end{cases}$$

Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

8. i) Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $\omega=3x-2y-11$ (4)

Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

- $2x-5y-2(3x-2y-11)=3 \Leftrightarrow 2x-5y-6x+4y+22=3$
$$\Leftrightarrow -4x-y=-19 \Leftrightarrow 4x+y=19 \quad (5)$$
- $5x+y-2(3x-2y-11)=33 \Leftrightarrow 5x+y-6x+4y+22=33$
$$\Leftrightarrow -x+5y=11 \Leftrightarrow x-5y=-11 \quad (6)$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα
$$\begin{cases} 4x+y=19 \\ x-5y=-11 \end{cases}$$
από τη λύση του οποίου κατά τα γνωστά βρίσκουμε $x=4$ και $y=3$. Με αντικατάσταση των τιμών των x και y στην (4) βρίσκουμε $\omega=-5$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι η τριάδα $(4,3,-5)$.

ii) Από τη δεύτερη εξίσωση έχουμε $x=3y-\omega+2$ (4)
Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

- $5(3y-\omega+2)-y+32=4 \Leftrightarrow 15y-5\omega+10-y+32=4$
$$\Leftrightarrow 14y-2\omega=-6 \Leftrightarrow 7y-\omega=-3 \quad (5)$$
- $3(3y-\omega+11)-2y+2\omega=2 \Leftrightarrow 9y-3\omega+6-2y+2\omega=2$
$$\Leftrightarrow 7y-\omega=-4 \quad (6)$$

Οι (5), (6) σχηματίζουν το 2 x 2 σύστημα
$$\begin{cases} 7y-\omega=-3 \\ 7y-\omega=-4 \end{cases}$$ που είναι αδύνατο.
Άρα το αρχικό σύστημα είναι αδύνατο.

iii) Απαλείφουμε τους παρονομαστές και το σύστημα γράφεται
$$\begin{cases} 2x+y-4\omega=6 \\ 3x+2y+2\omega=10 \\ 5x+3y-2\omega=16. \end{cases}$$
Από την πρώτη εξίσωση έχουμε $y=4\omega-2x+6$ (4)
Οι άλλες δύο εξισώσεις του συστήματος γίνονται

- $3x+2(4\omega-2x+6)+2\omega=10 \Leftrightarrow 3x+8\omega-4x+12+2\omega=10$
$$\Leftrightarrow -x+10\omega=-2 \Leftrightarrow x-10\omega=2 \quad (5)$$
- $5x+3(4\omega-2x+6)-2\omega=16 \Leftrightarrow 5x+12\omega-6x+18-2\omega=16$
$$\Leftrightarrow -x+10\omega=-2 \Leftrightarrow x-10\omega=2 \quad (6)$$

Οι (5), (6) αποτελούν το σύστημα
$$\begin{cases} x-10\omega=2 \\ x-10\omega=2 \end{cases}$$
που έχει άπειρες λύσεις της μορφής με $x=10k+2,\ \ \omega=k,\ \ k\in\mathbb{R}$.
Από την (4) έχουμε $y=4k-2(10k+2)+6=-16k+2$.
Άρα το αρχικό σύστημα έχει άπειρες λύσεις της μορφής $(10k+2,$ $-16k+2,k),\ \ k\in\mathbb{R}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έστω ότι η εξίσωση της ε_1 είναι $y = \alpha x + \beta$. Επειδή η ευθεία διέρχεται από τα σημεία $(0,2)$ και $(4,0)$ έχουμε

$$\begin{cases} 2 = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 0 = \alpha \cdot 4 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ 4\alpha + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon_1 : y = -\dfrac{1}{2}x + 2.$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι η εξίσωση της ε_2 είναι $y = x - 1$.

ii) Οι εξισώσεις των δύο ευθειών ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

του οποίου η λύση, όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι το ζεύγος $(2,1)$.

2. Αν x είναι ο αριθμός των δίκλινων και y ο αριθμός των τρίκλινων δωματίων, τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 26 \\ 2x + 3y = 68 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 16. \end{cases}$$

Άρα υπάρχουν 10 δίκλινα και 16 τρίκλινα δωμάτια.

3. Αν τον αγώνα παρακολούθησαν x παιδιά και y ενήλικες τότε από τα δεδομένα έχουμε

$$\begin{cases} x + y = 2200 \\ 1,5x + 4y = 5050 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1500 \\ y = 700. \end{cases}$$

Άρα τον αγώνα παρακολούθησαν 1500 παιδιά και 700 ενήλικες.

4. Αφού για $T = 20$ είναι $R = 0,4$, έχουμε

$$0,4 = \alpha \cdot 20 + \beta \Leftrightarrow 20\alpha + \beta = 0,4 \qquad (1)$$

Αφού για $T = 80$ είναι $R = 0,5$, έχουμε

$$0,5 = 80\alpha + \beta \Leftrightarrow 80\alpha + \beta = 0,5 \qquad (2)$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} 20\alpha + \beta = 0,4 \\ 80\alpha + \beta = 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{600} \\ \beta = \dfrac{11}{30}. \end{cases}$$

Άρα $R = \dfrac{1}{600} \cdot T + \dfrac{11}{30}.$

5. Αν απαιτούνται x $m\ell$ από το πρώτο διάλυμα και y $m\ell$ από το δεύτερο διάλυμα, τότε

$$x + y = 100. \qquad (1)$$

Η ποσότητα του υδροχλωρικού οξέως σε κάθε διάλυμα είναι $\dfrac{50}{100}x$ στο πρώτο και $\frac{80}{100}y$ στο δεύτερο. Επομένως $\frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y=\frac{68}{100}\cdot 100.$ (2)

Οι εξισώσεις (1) και (2) ορίζουν το σύστημα

$$\begin{cases} x+y=100 \\ \frac{50}{100}x+\frac{80}{100}y=\frac{68}{100}\cdot 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ 5x+8y=680. \end{cases}$$

Επομένως $5x+8(100-x)=680 \Leftrightarrow 5x+800-8x=680$

$\Leftrightarrow 5x-8x=680-800$

$\Leftrightarrow -3x=-120 \Leftrightarrow x=40$

οπότε $y=60$.

Άρα πρέπει να αναμείξει 40 mℓ από το πρώτο με 60 mℓ από το δεύτερο.

6. i) $2x+4y=3 \Leftrightarrow 4y=-2x+3 \Leftrightarrow y=-\frac{2}{4}x+\frac{3}{4}.$

Άρα $\lambda_1=-\frac{1}{2}$

$x+2y=\alpha \Leftrightarrow 2y=-x+\alpha \Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{\alpha}{2}.$

Άρα $\lambda_2=-\frac{1}{2}$

ii) Επειδή $\lambda_1=\lambda_2$, οι ευθείες ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.
Άρα δεν υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες τέμνονται.

iii) Οι ευθείες είναι παράλληλες όταν $\frac{3}{4}\neq\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow 4\alpha\neq 6 \Leftrightarrow \alpha\neq\frac{3}{2}.$

7. i) $\begin{cases} \alpha x+y=\alpha^2 \\ x+\alpha y=1. \end{cases}$

Έχουμε

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^2-1=(\alpha+1)(\alpha-1).$$

$$D_x=\begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix}=\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1).$$

$$D_y=\begin{vmatrix} \alpha & \alpha^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\alpha-\alpha^2=\alpha(1-\alpha).$$

Αν $D\neq 0$ δηλαδή αν $\alpha\neq -1$ και $\alpha\neq 1$, το σύστημα έχει μοναδική λύση, οπότε οι ευθείες τέμνονται και το σημείο τομής έχει συντεταγμένες

$x=\frac{D_x}{D}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}{(\alpha+1)(\alpha-1)}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}$ και

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+1)(\alpha-1)} = \frac{-\alpha}{\alpha+1}.$$

Άρα αν $\alpha \neq \pm 1$, οι ευθείες τέμνονται στο σημείο $A\left(\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}, \frac{-\alpha}{\alpha+1}\right)$.

• Αν $\alpha = 1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$

που σημαίνει ότι οι ευθείες ταυτίζονται.

• Αν $\alpha = -1$, το σύστημα γίνεται $\begin{cases} -x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=1 \end{cases}$

και είναι αδύνατο που σημαίνει ότι οι ευθείες είναι παράλληλες.

ii) $\begin{cases} \alpha x - y = \alpha \\ x + \alpha y = 1. \end{cases}$

Έχουμε

$D = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 + 1 \neq 0$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Άρα οι ευθείες έχουν μοναδικό κοινό σημείο για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

8. i) $$D = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 4 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1) - 4\cdot(-2) = -(\lambda^2-1)+8$$

$$= -\lambda^2+1+8 = -\lambda^2+9 = -(\lambda^2-9)$$

$$= -(\lambda+3)(\lambda-3).$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} = -1\cdot(\lambda+1) - (-2)(-2) = -\lambda-1-4 = -(\lambda+5).$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda-1)-4 = -2\lambda+2-4 = -2\lambda-2 = -2(\lambda+1).$$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$, τότε το σύστημα έχει μια λύση την

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-(\lambda+5)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{\lambda+5}{(\lambda+3)(\lambda-3)}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2(\lambda+1)}{-(\lambda+3)(\lambda-3)} = \frac{2(\lambda+1)}{(\lambda+3)(\lambda-3)}.$$

• Αν $\lambda = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} 2x-2y=1 \\ 4x-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y=1 \\ 2x-2y=-1, \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

• Αν $\lambda = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} -4x-2y=1 \\ 4x+2y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=-1 \\ 4x+2y=-2, \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

ii) $D = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & \mu+2 \end{vmatrix} = (\mu-2)(\mu+2)-5 = \mu^2-4-5 = \mu^2-9 = (\mu+3)(\mu-3).$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & \mu+2 \end{vmatrix} = 5(\mu+2)-25 = 5\mu+10-25 = 5\mu-15 = 5(\mu-3).$

$D_y = \begin{vmatrix} \mu-2 & 5 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5(\mu-2)-5 = 5\mu-10-5 = 5\mu-15 = 5(\mu-3).$

• Αν $D \neq 0$, δηλαδή $\mu \neq \pm 3$ το σύστημα έχει μοναδική λύση, την

$x = \frac{D_x}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{\mu+3}$

$y = \frac{D_y}{D} = \frac{5(\mu-3)}{(\mu+3)(\mu-3)} = \frac{5}{\mu+3}.$

• Αν $\mu = 3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} x+5y=5 \\ x+5y=5, \end{cases}$ που έχει άπειρες λύσεις τα ζεύγη $(5-5k, k)$, όπου k οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

• Αν $\mu = -3$, τότε το σύστημα γίνεται

$\begin{cases} -5x+5y=5 \\ \quad x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-1 \\ x-y=5, \end{cases}$ που είναι αδύνατο.

9. Αν R_1, R_2 και R_3 οι ακτίνες των κύκλων με κέντρα O_1, O_2 και O_3 αντιστοίχως, τότε

$$\begin{cases} R_1+R_2=6 & (1) \\ R_2+R_3=7 & (2) \\ R_1+R_3=5 & (3) \end{cases}$$

Το σύστημα λύνεται με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Λόγω όμως της μορφής του μπορούμε να το λύσουμε και ως εξής:
Προσθέτουμε κατά μέλη τις εξισώσεις και έχουμε

$$2(R_1+R_2+R_3)=18 \Leftrightarrow R_1+R_2+R_3=9 \qquad (4)$$

Αν τώρα από τα μέλη της (4) αφαιρέσουμε τα μέλη των (1), (2) και (3), βρίσκουμε ότι

$$R_1+R_2+R_3-R_1-R_2=9-6 \Leftrightarrow R_3=3.$$

$$R_1+R_2+R_3-R_2-R_3=9-7 \Leftrightarrow R_1=2.$$

$$R_1+R_2+R_3-R_1-R_3=9-5 \Leftrightarrow R_2=4.$$

Επομένως οι ακτίνες των κύκλων είναι 2 cm, 4 cm και 3 cm.

10. Τα εφαπτόμενα τμήματα από σημείο προς κύκλο είναι ίσα.

Επομένως $AZ = AE = x$, $B\Delta = BZ = y$ και $\Gamma\Delta = \Gamma E = z$. Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+y=\gamma & (1) \\ y+z=\alpha & (2) \\ z+x=\beta & (3) \end{cases}$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων κατά μέλη έχουμε

$$2(x+y+z)=\alpha+\beta+\gamma \Leftrightarrow x+y+z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \quad (4)$$

• Από (4) και (1) έχουμε $\gamma+z=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow z=\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$.

• Από (4) και (2) έχουμε $x+\alpha=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

• Από (4) και (3) έχουμε $y+\beta=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Leftrightarrow y=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$.

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, τότε

$x=\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}=\frac{2\tau-\alpha-\alpha}{2}=\tau-\alpha$ και ομοίως $y=\tau-\beta$, $z=\tau-\gamma$.

11. Αν x, y, z οι ποσότητες σε lt από κάθε διάλυμα αντιστοίχως, τότε έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x+y+z=52 \\ \frac{50}{100}x+\frac{10}{100}y+\frac{30}{100}z=\frac{32}{100}\cdot 52 \\ x=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=52 & (1) \\ 50x+10y+30z=1664 & (2) \\ x=2z & (3) \end{cases}$$

Από (1) και (3) έχουμε $y+3z=52$, οπότε $y=52-3z$ και η (2) γίνεται

$$50\cdot 2z+10(52-3z)+30z=1664$$
$$\Leftrightarrow 100z+520-30z+30z=1664$$
$$\Leftrightarrow 100z=1144 \Leftrightarrow z=11,44,$$

οπότε $z \simeq 11,44$ lt

Επομένως $x=22,88$ lt και $y=17,68$ lt.

12. • Στην $1^η$ περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου f(x) τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο 3, θα ισχύει $f(0)=3$, οπότε θα έχουμε $\gamma=3$, επομένως το τριώνυμο θα είναι της μορφής

$$f(x)=\alpha x^2+\beta x+3.$$

Επειδή το τριώνυμο f(x) έχει κορυφή το σημείο $K(2,-1)$ θα ισχύει

$$\begin{cases} \frac{-\beta}{2\alpha}=2 \\ f\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4\alpha \\ f(2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-4 \\ \alpha=1. \end{cases}$$

Επομένως είναι $f(x)=x^2-4x+3$.

• Στην 2^{η} περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο -1, θα ισχύει $g(-1)=0$, οπότε θα έχουμε

$$\alpha-\beta+\gamma=0. \tag{2}$$

Επειδή επιπλέον η γραφική παράσταση του τριωνύμου $g(x)$ έχει κορυφή το σημείο $K(1,4)$, θα ισχύει

$$\begin{cases}\dfrac{-\beta}{2\alpha}=1\\ g\left(\dfrac{-\beta}{2\alpha}\right)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha\\ g(1)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha & (3)\\ \alpha+\beta+\gamma=4. & (4)\end{cases}$$

Επομένως, λόγω της (3), οι (2) και (4) γράφονται

$$\begin{cases}3\alpha+\gamma=0\\ -\alpha+\gamma=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=-3\alpha\\ -\alpha-3\alpha=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\gamma=3\\ \alpha=-1\end{cases}$$

Άρα είναι $\alpha=-1$, $\beta=2$ και $\gamma=3$, οπότε έχουμε $g(x)=-x^2+2x+3$.

2ος τρόπος:

Μία ρίζα του τριωνύμου $g(x)$ είναι $\rho_1=-1$. Αν ρ_2 είναι η άλλη ρίζα αυτού, τότε θα ισχύει $\rho_1+\rho_2=\dfrac{-\beta}{\alpha}$. Επειδή, όμως η τετμημένη x_k της κορυφής της παραβολής δίνεται από τον τύπο με $x_k=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$ και επειδή $x_k=1$, θα ισχύει

$$\frac{-\beta}{2\alpha}=1\Leftrightarrow\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=1\Leftrightarrow\frac{-1+\rho_2}{2}=1\Leftrightarrow\rho_2=3.$$

Άρα οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί $\rho_1=-1$ και $\rho_2=3$, οπότε θα έχουμε

$$g(x)=\alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)=\alpha(x+1)(x-3).$$

Επειδή, όμως η κορυφή K της παραβολής έχει συντεταγμένες $(1,4)$, θα ισχύει $g(1)=4$, οπότε θα έχουμε

$$\alpha(1+1)(1-3)=4\Leftrightarrow\alpha=-1.$$

Επομένως είναι

$$g(x)=-1(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3.$$

• Στην 3^{η} περίπτωση, επειδή η γραφική παράσταση του τριωνύμου $h(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία 2 και 4 και τον άξονα $y'y$ στο σημείο 4, θα ισχύει

$$\begin{cases}h(2)=0\\ h(4)=0\\ h(0)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha+2\beta+\gamma=0\\ 16\alpha+4\beta+\gamma=0\\ \gamma=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\alpha+2\beta=-4\\ 16\alpha+4\beta=-4\\ \gamma=4\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=-2\\ 4\alpha+\beta=-1\\ \gamma=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-2\alpha-2\\ 4\alpha-2\alpha-2=-1\\ \gamma=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\\ \alpha=0,5\\ \gamma=4\end{cases}$$

Επομένως είναι $h(x)=0,5x^2-3x+4$.