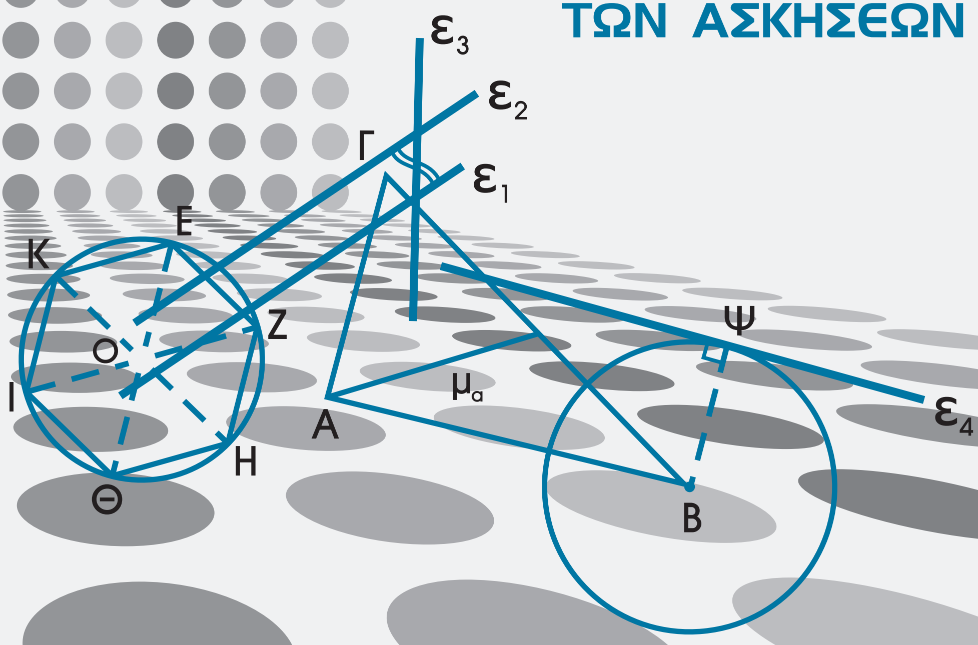
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Τεύχος Α΄

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ



Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ
«ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α΄ ΤΕΥΧΟΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε
υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΑΝΑΔΟΧΟΣ ΕΡΓΟΥ: **ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Βλάμος Παναγιώτης

Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος

Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός

Επίκουρος Καθηγητής Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολυχρόνης

Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: *Βανδουλάκης Ιωάννης*

Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας
Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια: *Δημητρίου Ελένη*

Επιλογή εικόνων: *Παπαδοπούλου Μπία*

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση: *Αλεξοπούλου Καίτη*

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Αγαπητοί Μαθητές,

το τεύχος που κρατάτε στα χέρια σας περιέχει τις λύσεις των ασκήσεων του σχολικού σας βιβλίου. Αν χρησιμοποιηθεί σωστά μπορεί να αποτελέσει πολύτιμη βοήθεια στην προσπάθειά σας να καταλάβετε τις γεωμετρικές έννοιες που εισάγονται στο βιβλίο σας και να τις χρησιμοποιήσετε δημιουργικά.

Σε καμμία περίπτωση το τεύχος των λύσεων δεν πρέπει να χρησιμοποιείται στην πρώτη δυσκολία που παρουσιάζει μία άσκηση ή για να καλύψει την "επιμέλεια" ενός μαθητή προς τον καθηγητή του στο σχολείο.

Για να χρησιμοποιήσετε σωστά τις λύσεις των ασκήσεων πρέπει να ακολουθήσετε μια συγκεκριμένη μεθοδολογία. Αρχικά, προσπαθήστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικούς τρόπους αντιμετώπισης. Αν αποτύχετε κάντε μία επανάληψη στην αντίστοιχη θεωρία για να διαπιστώσετε ότι δεν έχετε κενά. Κατόπιν, ξαναπροσπαθήστε την άσκηση διαβάζοντας και την υπόδειξη που βρίσκεται στο τέλος του σχολικού βιβλίου. Αν πάλι δυσκολεύεστε να λύσετε την άσκηση, τότε διαβάστε την ολοκληρωμένη λύση της. Φροντίστε να εντοπίσετε τα κύρια βήματα της λύσης, καθώς και τα κενά που σας οδήγησαν στο να μην αντιμετωπίζετε σωστά την άσκηση. Προσπαθήστε να διορθώσετε τα κενά αυτά και να ξαναλύσετε την άσκηση, χωρίς όμως να επαναλαμβάνετε τη λύση με στείρα απομνημόνευση, αλλά υλοποιώντας τα κύρια βήματά της. Τέλος, δοκιμάστε να λύσετε την άσκηση με διαφορετικό και ίσως καλύτερο τρόπο.

Πρέπει να τονισθεί ότι οι λύσεις είναι προτεινόμενες, με την έννοια ότι είναι δυνατόν και ελπίζουμε να βρεθούν κομψότερες από τους μαθητές.

Σημαντική είναι η προσπάθεια που έχει καταβληθεί, ώστε η κάθε άσκηση να προωθεί συγκεκριμένες αντιλήψεις και συνήθειες στο μαθητή, ενώ το σύνολο των ασκήσεων σε κατηγορία και διαβάθμιση οδηγούν τον μαθητή στην καλλιέργεια συγκεκριμένων ικανοτήτων.

Για να επιτευχθούν οι στόχοι αυτοί, είτε μέσα στη λύση της κάθε άσκησης, είτε μετά την ολοκλήρωσή της, αναγράφεται ο διδακτικός της στόχος, ενώ οι ασκήσεις χωρίστηκαν στις παρακάτω κατηγορίες, δίνοντας φυσικά βαρύτητα στη διαβάθμιση των ασκήσεων κάθε κατηγορίας:

1) Ασκήσεις Εμπέδωσης:
Οι ασκήσεις αυτές εισάγονται αμέσως μετά τη Θεωρία και τις Εφαρμογές, με σκοπό την εμπέδωση των εννοιών από τους μαθητές και τη χρήση τους σε απλές ασκήσεις.

2) Αποδεικτικές Ασκήσεις:
Είναι ασκήσεις που ταιριάζουν στη φύση της Γεωμετρίας, καλλιεργώντας την αποδεικτική διαδικασία στους μαθητές.

3) Σύνθετα θέματα:
Είναι θέματα που συνδυάζουν περισσότερες από μία γεωμετρικές έννοιες ή γνώσεις, είτε από το ίδιο κεφάλαιο, είτε από διαφορετικά, αναδεικνύοντας την κριτική σκέψη και συνδυαστική ικανότητα των μαθητών.

4) Γενικές Ασκήσεις:
Είναι ασκήσεις αυξημένης δυσκολίας, που παρατίθενται στο τέλος κάθε Κεφαλαίου και απευθύνονται σε μαθητές με ιδιαίτερο ζήλο και αγάπη προς τη Γεωμετρία.

5) Δραστηριότητες:
Είναι αντικείμενο μελέτης ομάδας μαθητών ή και ενός, εφόσον του παρέχεται το κατάλληλο χρονικό διάστημα, ενώ θα πρέπει να δοθεί κάθε δυνατή βοήθεια και υποδείξεις από τον καθηγητή.

Κάθε κεφάλαιο, τέλος, πλαισιώνεται από ερωτήσεις κατανόησης που συντελούν στη σωστή επανάληψη και καλύτερη οργάνωση της ύλης.

Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 15

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 39

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 53

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 77

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

2

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- Από τρία διαφορετικά συνευθειακά σημεία το ένα βρίσκεται μεταξύ των δύο άλλων. Για την επίλυση σχετικών ασκήσεων διακρίνουμε περιπτώσεις.
  (**Ασκήσεις:** § 2.1-2.10 Αποδεικτικές 3, Σύνθετα 1)

- Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν κοινό μέσο Ο τότε ΟΑ = ΟΒ και ΟΓ = ΟΔ. Για να αποδείξουμε ότι δυο τμήματα έχουν κοινό μέσο, θεωρούμε το μέσο του ενός και αποδεικνύουμε ότι είναι μέσο και του άλλου τμήματος.
  (**Ασκήσεις:** Γενικές 2)

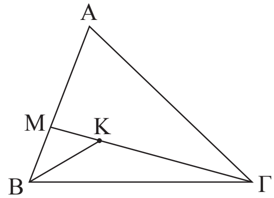
- Για να υπολογίσουμε την παραπληρωματική $\hat{\varphi}$ ή την συμπληρωματική $\hat{\theta}$ μιας γωνίας $\hat{\omega}$ θέτουμε: $\hat{\varphi} = 180^\circ - \hat{\omega}$ και $\hat{\theta} = 90^\circ - \hat{\omega}$.
  (**Ασκήσεις:** § 2.19 Αποδεικτικές 1, 2)

§ 2.1-2.10

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

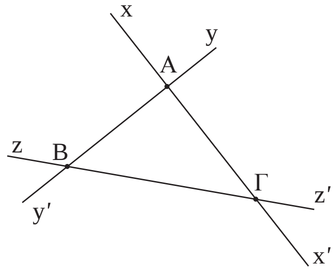
1. i) Έξι ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΒΓ, ΒΔ και ΓΔ.

ii) Τα τμήματα που έχουμε στο σχήμα είναι τα ΑΒ, ΑΓ, ΑΜ, ΒΚ, ΒΓ, ΒΜ, ΓΚ, ΓΜ, ΜΚ και το ΑΚ που δεν είναι σχεδιασμένο.

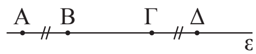


2. i) Τα σημεία τομής είναι τρία, τα Α, Β και Γ.

ii) Ορίζονται τρία ευθύγραμμα τμήματα, τα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, και 12 ημιευθείες, οι εξής: Αx, Αx′, Αy, Αy′, Βy, Βy′, Βz, Βz′, Γx, Γx′, Γz, Γz′.



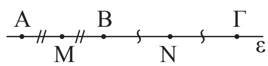
3. Είναι $ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ = ΓΔ + ΒΓ = ΒΔ$, αφού $ΑΒ = ΓΔ$.



4. $ΑΓ = ΑΜ + ΜΒ + ΒΝ + ΝΓ = 2ΜΒ + 2ΒΝ =$

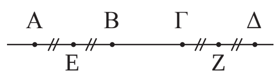
$= 2(ΜΒ + ΒΝ) = 2ΜΝ,$

αφού $ΑΜ = ΜΒ$ και $ΒΝ = ΝΓ$.



Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. i) Έχουμε $ΑΔ = ΑΕ + ΕΖ + ΖΔ$



και $ΒΓ = ΕΖ - ΕΒ - ΓΖ$,

οπότε $ΑΒ + ΒΓ = 2ΕΖ \ (ΑΕ = ΕΒ,\ ΖΔ = ΓΖ) \Leftrightarrow ΕΖ = \dfrac{ΑΔ + ΒΓ}{2}$.

ii) Έχουμε

$ΑΓ + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΓ) + ΒΔ = (ΑΒ + ΒΔ) + ΒΓ = ΑΔ + ΒΓ$.

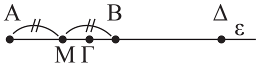
2. i) Έχουμε

$$\left.\begin{aligned} ΓΑ &= ΓΜ + ΜΑ \\ ΓΒ &= ΜΒ - ΓΜ \end{aligned}\right\} \text{Άρα } ΓΑ - ΓΒ = 2ΓΜ \ (ΜΑ = ΜΒ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ΓΜ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}.$$

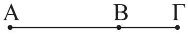
ii) Έχουμε

$$\left.\begin{aligned}\Delta A &= AM + \Delta M\\ \Delta B &= \Delta M - BM\end{aligned}\right\}\ \text{Άρα } \Delta A + \Delta B = 2\Delta M \Leftrightarrow \Delta M = \frac{\Delta A + \Delta B}{2}.$$

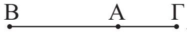


3. α) i) 

Αν το Γ είναι μεταξύ των Α και Β τότε $AB = A\Gamma + \Gamma B$.

ii) 

Αν το Β είναι μεταξύ των Α και Γ τότε $AB < A\Gamma$, οπότε $AB < A\Gamma + \Gamma B$.

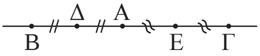
iii) 

Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε $AB < \Gamma B$, οπότε $AB < A\Gamma + \Gamma B$. Άρα πάντα έχουμε $AB \le A\Gamma + \Gamma B$.

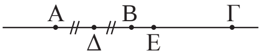
β) Για τα Α, Β, Γ ισχύει $AB \le A\Gamma + \Gamma B$ (1) ενώ για τα Α, Β, Δ ισχύει $A\Delta \le AB + B\Delta$ (2).

Από (1), (2) προκύπτει ότι $A\Delta \le A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$.

Σύνθετα Θέματα

1. i) Αν το Α είναι μεταξύ των Β και Γ τότε: 

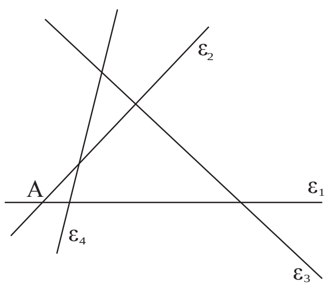
$$\Delta E = A\Delta + AE = \frac{AB}{2} + \frac{A\Gamma}{2} = \frac{AB + A\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2}.$$

ii) 

Αν το Α είναι στην προέκταση του ΒΓ, π.χ. προς το μέρος του Β, τότε:

$$\Delta E = AE - A\Delta = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2} = \frac{B\Gamma}{2}.$$

2. Αν παραστήσουμε με ε_1, ε_2, ε_3 και ε_4 τις τέσσερις ευθείες οδούς αρκεί να βρούμε πόσα είναι τα σημεία τομής των ευθειών αυτών. Σε κάθε μια ευθεία, π.χ. την ε_1, οι άλλες $(4-1)=3$ ευθείες ορίζουν $(4-1)=3$ σημεία. Άρα συνολικά θα ορίζονταν $4(4-1)=12$ σημεία. Αλλά κάθε σημείο το υπολογίσαμε 2 φορές, π.χ. το Α ως σημείο της ε_1 και της ε_2.

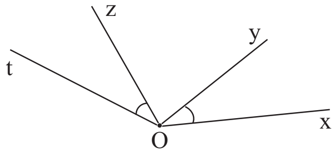


Άρα τελικά ορίζονται $\frac{4(4\quad 1)}{2} = \frac{12}{2} = 6$ σημεία.

Επομένως χρειάζονται 6 τροχονόμοι. Όμοια οι ν ευθείες ορίζουν $\frac{\nu(\nu\quad 1)}{2}$ σημεία.

§ 2.11-2.16

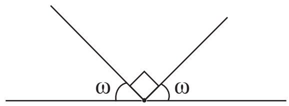
Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



1. Έχουμε $x\hat{O}z = y\hat{O}t$

ή $x\hat{O}y + y\hat{O}z = y\hat{O}z + z\hat{O}t$.

Άρα $x\hat{O}y = z\hat{O}t$.

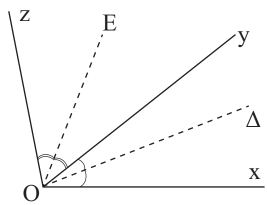


2. Είναι $\hat{\omega} + 1$ ορθή $+\ \hat{\omega} = 2$ ορθές,

οπότε $2\hat{\omega} = 1$ ορθή ή $\hat{\omega} = \frac{1}{2}$ ορθής.

3. Όταν το ρολόι δείχνει εννέα η ώρα ακριβώς οι δείκτες σχηματίζουν ορθή γωνία. Οι δείκτες θα σχηματίζουν και πάλι ορθή γωνία μετά από 6 ώρες. Τότε το ρολόι δείχνει τρεις η ώρα ακριβώς.

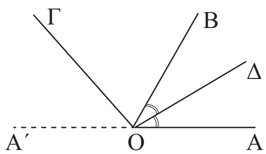
Αποδεικτικές Ασκήσεις



1. Έστω $x\hat{O}y$, $y\hat{O}z$ δύο εφεξής γωνίες και ΟΔ, ΟΕ οι διχοτόμοι τους αντίστοιχα.

Τότε $\Delta\hat{O}E = \Delta\hat{O}y + y\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y}{2} + \frac{y\hat{O}z}{2}$.

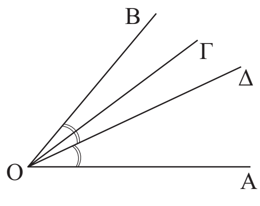
Άρα $\Delta\hat{O}E = \frac{x\hat{O}y + y\hat{O}z}{2}$.



2. Έχουμε: $\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Gamma\hat{O}\Delta - \Delta\hat{O}B \end{aligned}\right\}$

Άρα

$$\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \ \ (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A + \Gamma\hat{O}B}{2}.$$



3. Έχουμε:

$\left.\begin{aligned} \Gamma\hat{O}A &= \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A \\ \Gamma\hat{O}B &= \Delta\hat{O}B - \Gamma\hat{O}\Delta \end{aligned}\right\}$ Άρα

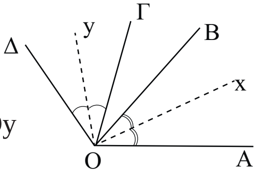
$$\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B = 2\Gamma\hat{O}\Delta \ \ (\Delta\hat{O}A = \Delta\hat{O}B) \Leftrightarrow \Gamma\hat{O}\Delta = \frac{\Gamma\hat{O}A - \Gamma\hat{O}B}{2}$$

22-0237-02 indd 8 14/4/2016 1:04:35 μμ

Σύνθετα Θέματα

1. Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} A\hat{O}\Delta &= A\hat{O}x + x\hat{O}y + y\hat{O}\Delta \\ B\hat{O}\Gamma &= x\hat{O}y - B\hat{O}x - \Gamma\hat{O}y \end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\text{Άρα}\\ &A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma = 2x\hat{O}y\end{aligned}$$



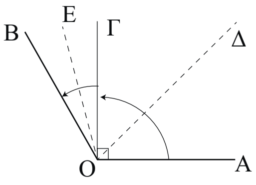
$$(\text{γιατί } A\hat{O}x = B\hat{O}x,\ y\hat{O}\Delta = \Gamma\hat{O}y)$$

$$\Leftrightarrow x\hat{O}y = \frac{A\hat{O}\Delta + B\hat{O}\Gamma}{2}.$$

2. Έχουμε:

$$\Delta\hat{O}E = B\hat{O}\Delta - B\hat{O}E = \frac{A\hat{O}B}{2} - \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} =$$

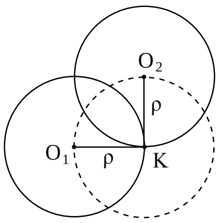
$$= \frac{A\hat{O}B - B\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{A\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{1}{2}\llcorner \quad (O\Gamma \perp OA)$$



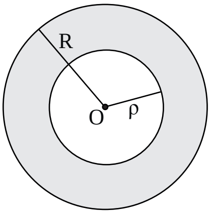
§ 2.17-2.18

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**

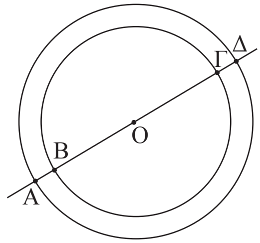
1. Υπάρχουν άπειροι κύκλοι ακτίνας ρ που διέρχονται από το Κ. Τα κέντρα τους βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα ρ.



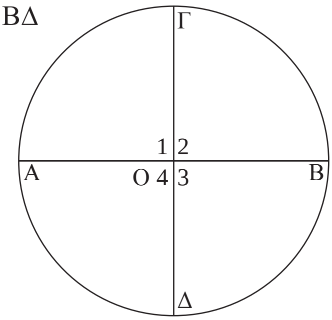
2. Τα σημεία που είναι εσωτερικά του κύκλου (Ο, R) και εξωτερικά του κύκλου (Ο, ρ) φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



Αποδεικτικές Ασκήσεις



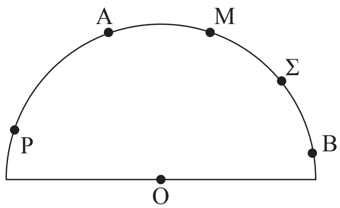
1. Επειδή η ε διέρχεται από το κοινό κέντρο Ο των κύκλων τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ είναι διάμετροι αυτών με κοινό μέσον το Ο και επομένως έχουμε:
$ΑΟ = ΟΔ$ και $ΒΟ = ΟΓ$.
Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη προκύπτει:
$ΑΟ - ΒΟ = ΟΔ - ΟΓ \Leftrightarrow ΑΒ = ΓΔ$,
σύμφωνα με το σχήμα. Επίσης έχουμε:
$ΑΒ = ΓΔ \Leftrightarrow ΑΒ + ΒΓ = ΒΓ + ΓΔ \Leftrightarrow ΑΓ = ΒΔ$



2. Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο διάμετροι ενός κύκλου (Ο, R) τέτοιες ώστε $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Τότε η ΟΓ είναι διχοτόμος της ευθείας γωνίας $Α\hat{O}Β$, επομένως κάθε μια από τις $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$ είναι ορθή γωνία. Η $\hat{O}_3$, ως κατακορυφήν της $\hat{O}_1$, είναι κι αυτή ορθή. Όμοια και η $\hat{O}_4$. Έτσι οι επίκεντρες γωνίες $\hat{O}_1$, $\hat{O}_2$, $\hat{O}_3$ και $\hat{O}_4$ είναι ίσες, οπότε και τα αντίστοιχα τόξα αυτών είναι ίσα, δηλαδή $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΓΒ} = \overset{\frown}{ΒΔ} = \overset{\frown}{ΔΑ}$ και επειδή τα τόξα αυτά αποτελούν ολόκληρο τον κύκλο προκύπτει το ζητούμενο.

§ 2.19

Ασκήσεις **Εμπέδωσης**



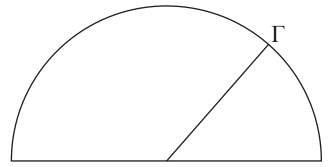
1. Έστω ημικύκλιο κέντρου Ο, δύο σημεία Α, Β αυτού και το σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ ώστε $\overset{\frown}{MA}$ $\quad$ $\overset{\frown}{MB}$.

i) Για σημείο Ρ του ημικυκλίου, που δεν ανήκει στο $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε:
$\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{PM} - \overset{\frown}{AM}$ και $\overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{MB}$.
Με πρόσθεση αυτών κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\overset{\frown}{AM}$ $\quad$ $\overset{\frown}{MB}$ προκύπτει

$$\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB} \quad 2\overset{\frown}{PM} \Leftrightarrow \overset{\frown}{PM} \quad \frac{1}{2}(\overset{\frown}{PA} + \overset{\frown}{PB}).$$

ii) Έστω σημείο Σ του τόξου $\overset{\frown}{MB}$. Έχουμε (βλέπε σχήμα) $\overset{\frown}{ΣA} \quad \overset{\frown}{ΣM} + \overset{\frown}{MA}$ και $\overset{\frown}{ΣB} = \overset{\frown}{MB} - \overset{\frown}{ΣM}$. Με αφαίρεση αυτών κατά μέλη, λαμβάνοντας πάλι υπόψη ότι $\overset{\frown}{AM} \quad \overset{\frown}{MB}$ προκύπτει:
$\overset{\frown}{ΣA} \quad \overset{\frown}{ΣB} \quad 2\overset{\frown}{ΣM} \Leftrightarrow \overset{\frown}{ΣM} \quad \frac{1}{2}(\overset{\frown}{ΣA} \quad \overset{\frown}{ΣB})$.

2. α) Είναι $\overset{\frown}{AΓ} \quad \overset{\frown}{ΓB} \quad 80^\circ$
και $\overset{\frown}{AΓ} + \overset{\frown}{ΓB} \quad 180^\circ$,
από τις οποίες με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη παίρνουμε αντίστοιχα $\overset{\frown}{AΓ} \quad 130^\circ$ και $\overset{\frown}{ΓB} \quad 50^\circ$,
οπότε και $(\overset{\frown}{AΓ}) \quad 130^\circ$, $(\overset{\frown}{ΓB}) \quad 50^\circ$.



β) Η $A\hat{O}Γ$ είναι επίκεντρη και βαίνει στο $\overset{\frown}{AΓ}$, άρα $(A\hat{O}Γ) = (\overset{\frown}{AΓ}) = 130^\circ$.
Όμοια $(B\hat{O}Γ) = 50^\circ$.

3. Έστω $\hat{\omega}$ και $\hat{\varphi}$ δύο συμπληρωματικές γωνίες με $\hat{\omega} = 2\hat{\varphi}$. Πρέπει $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^\circ$ ή $2\hat{\varphi} + \hat{\varphi} = 90^\circ$ ή $3\hat{\varphi} = 90^\circ$. Άρα $\hat{\varphi} = 30^\circ$, οπότε $\hat{\omega} = 60^\circ$.

4. Είναι $\hat{\omega} = \frac{6}{5}$ ορθής $= \frac{6}{5} \cdot 90^\circ = 108^\circ$. Άρα η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ είναι $\hat{\varphi} = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Η γωνία $\hat{\omega}$ δεν έχει συμπληρωματική, αφού είναι αμβλεία γωνία.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω $\hat{\varphi}$ η παραπληρωματική της $\hat{\omega}$ και $\hat{\theta}$ η συμπληρωματική της.

Τότε $\hat{\varphi} = 180^\circ - \hat{\omega}$, $\hat{\theta} = 90^\circ - \hat{\omega}$ και $\hat{\varphi} = 3\hat{\theta}$. Άρα $180^\circ - \hat{\omega} = 3(90^\circ - \hat{\omega})$ ή $180^\circ - \hat{\omega} = 270^\circ - 3\hat{\omega}$ ή $2\hat{\omega} = 90^\circ$.
Άρα $\hat{\omega} = 45^\circ$.

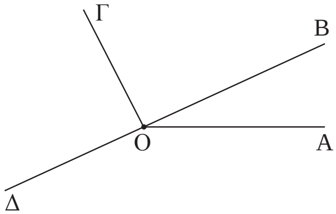
2. Έστω $\hat{\omega}$ η συμπληρωματική της $\hat{\varphi}$. Τότε $\hat{\varphi} = 90^\circ - \hat{\omega}$ και $\hat{\varphi} = \hat{\omega} - 20^\circ$. Άρα $90^\circ - \hat{\omega} = \hat{\omega} - 20^\circ \Leftrightarrow 2\hat{\omega} = 110^\circ \Leftrightarrow \hat{\omega} = 55^\circ$.

Άρα $\hat{\omega} = 55^\circ$ και $\hat{\varphi} = 35^\circ$.

3. Έχουμε $\frac{A\hat{O}B}{1} = \frac{B\hat{O}Γ}{2} = \frac{Γ\hat{O}Δ}{3} = \frac{Δ\hat{O}A}{4}$. Θέτουμε
$\frac{A\hat{O}B}{1} = \frac{B\hat{O}Γ}{2} = \frac{Γ\hat{O}Δ}{3} = \frac{Δ\hat{O}A}{4} = \lambda$, οπότε

22-0237-02 indd 11 14/4/2016 1:04:42 μμ

$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}B = \lambda \\ B\hat{O}\Gamma = 2\lambda \\ \Gamma\hat{O}\Delta = 3\lambda \\ \Delta\hat{O}A = 4\lambda \end{array}\right\}$$ Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει ότι



$A\hat{O}B + B\hat{O}\Gamma + \Gamma\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}A = 10\lambda \Leftrightarrow 360^\circ = 10\lambda$.

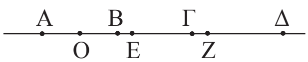
Άρα $\lambda = 36^\circ$.

Επομένως $A\hat{O}B = 36^\circ$, $B\hat{O}\Gamma = 2(36^\circ) = 72^\circ$, $\Gamma\hat{O}\Delta = 3(36^\circ) = 108^\circ$

και $\Delta\hat{O}A = 4(36^\circ) = 144^\circ$.

Γενικές Ασκήσεις

1. Έστω Ο το μέσο του ΑΒ.



Τότε $EZ \quad OZ \quad OE$ (1)

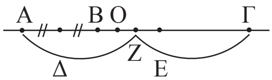
Αλλά

$$OZ \quad OB + BZ \quad \frac{AB}{2} + \frac{B\Delta}{2} \quad \frac{AB + B\Delta}{2} \quad \frac{A\Delta}{2}$$ (2) και

$$OE \quad AE \quad AO \quad \frac{A\Gamma}{2} \quad \frac{AB}{2} \quad \frac{A\Gamma \quad AB}{2} \quad \frac{B\Gamma}{2}$$ (3)

Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $EZ = \dfrac{A\Delta \quad B\Gamma}{2}$.

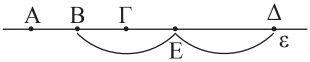
2. Έστω Ο το μέσο του ΒΖ. Τότε $OB = OZ$.
Για να είναι το Ο μέσο και του ΔΕ αρκεί
$\Delta B \quad ZE$ (αφού $OB = OZ$).



Πράγματι $ZE = Z\Gamma - E\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2} - \dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{A\Gamma - B\Gamma}{2} = \dfrac{AB}{2} = \Delta B$.

3. Έχουμε: $AE \quad AB + BE$

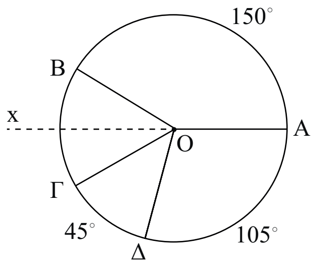
$$= AB + \frac{B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Delta}{2} = \frac{2AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}{2} =$$



$$= \frac{AB + B\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{A\Gamma}{2} + \frac{AB + \Gamma\Delta}{2} > \frac{A\Gamma}{2}.$$

4. Έχουμε $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{\Delta A} = 360^\circ$, οπότε

$\overset{\frown}{B\Gamma} = 360^\circ - 150^\circ - 105^\circ - 45^\circ = 60^\circ$.



Άρα οι επίκεντρες γωνίες είναι:

$A\hat{O}B = 150^\circ$ και $B\hat{O}\Gamma \quad 60^\circ$.

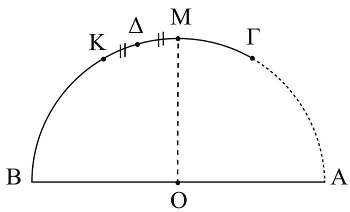
Επομένως

$$A\hat{O}B + B\hat{O}x = A\hat{O}B + \frac{B\hat{O}\Gamma}{2} \text{ (Οx διχοτόμος } B\hat{O}\Gamma\text{)} \quad 150^\circ + \frac{60^\circ}{2} \text{ ή}$$

$A\hat{O}B + B\hat{O}x = 180^\circ$, δηλαδή ΟΑ, Οx αντικείμενες ημιευθείες.

5. Αφού $\overset{\frown}{AB}$ ημικύκλιο και Μ μέσο $\overset{\frown}{AB}$,

είναι $\overset{\frown}{AM} \quad \frac{180^\circ}{2} \quad 90^\circ$.



Άρα

$$\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{A\Delta} - \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{AM} + \overset{\frown}{M\Delta} - \overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{AM} + \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} - \frac{\overset{\frown}{AK}}{2} =$$

$$\overset{\frown}{AM} \quad \left(\frac{\overset{\frown}{AK}}{2} \quad \frac{\overset{\frown}{MK}}{2} \right) \quad \overset{\frown}{AM} \quad \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \quad \frac{\overset{\frown}{AM}}{2} \quad \frac{90^\circ}{2} \quad 45^\circ.$$

22-0237-02 indd 13 14/4/2016 1:04:45 μμ

3

ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

• Ένα σημείο ανήκει στη μεσοκάθετο ενός τμήματος αν ισαπέχει από τα άκρα του. Αντίστοιχα ένα εσωτερικό σημείο γωνίας ανήκει στη διχοτόμο της αν ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
(**Ασκήσεις:** § 3.4 Σύνθετα 2)

• Αν **δύο** σημεία μιας ευθείας ε ισαπέχουν από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος η ευθεία ε είναι μεσοκάθετος του τμήματος.
(**Ασκήσεις:** § 3.12 Εμπέδωσης 2)

• Σε ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες, οπότε και οι αντίστοιχες εξωτερικές γωνίες του τριγώνου είναι ίσες (παραπληρώματα ίσων γωνιών).
(**Ασκήσεις:** § 3.4 Σύνθετα 3 και § 3.12 Εμπέδωσης 8)

• Για να συγκριθούν ανισοτικά δύο τρίγωνα πρέπει να έχουν απαραίτητα δυο πλευρές ίσες.
(**Ασκήσεις:** § 3.12 Αποδεικτικές 2, 7)

• Όταν η διάμεσος είναι βασικό στοιχείο σε μια άσκηση, συχνά χρειάζεται να την προεκτείνουμε.
(**Ασκήσεις:** § 3.12 Αποδεικτικές 3 και Γενικές 7)