θ) $x^2 - (5 + 3)x + 5 \cdot 3 = (\ldots\ldots\ldots).(\ldots\ldots\ldots)$
ι) $x^2 + (5 - 3)x - 5 \cdot 3 = (\ldots\ldots\ldots).(\ldots\ldots\ldots)$

(Μονάδες 7)

Θέμα 2ο

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $5x^3 - 20x$

(Μονάδες 3)

β) Να λύσετε την εξίσωση $7x^3 = 2(10x + x^3)$

(Μονάδες 3,5)

Θέμα 3ο

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $A = x^4 - 4x^2$, $B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$ και $A - B$

(Μονάδες 6,5)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

α) $3x^2 - 12xy + xy\omega - 15x = 3x(x - 4y + 3\omega - 5)$
β) $\alpha(x^2 + 1) - 3\beta(x^2 + 1) + 2(x^2 + 1) = (x^2 + 1)(\alpha - 3\beta + 2)$
γ) $49x^2 - 16 = (7x + 4)(7x - 4)$
δ) $8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
ε) $8 + 27x^3 = (2 + 3x) = (2 + 3x) \cdot (4 + 6x + 9x^2)$
στ) $4x^2 - 12x + y = (2x - 3)^2$
ζ) $16x^2 + 24x + 9 = (4x + 3)^2$
η) $x^2 + (5 + 3)x + 5 \cdot 3 = (x + 5) \cdot (x + 3)$
θ) $x^2 - (5 + 3)x + 5 \cdot 3 = (x - 5) \cdot (x - 3)$
ι) $x^2 + (5 - 3)x - 5 \cdot 3 = (x + 5) \cdot (x - 3)$

Θέμα 2ο

α) $5x^3 - 20x = 5x(x^2 - 4) = 5x(x^2 - 2^2) = 5x(x - 2)(x + 2)$
β) $7x^3 = 20x + 2x^3$ ή $7x^3 - 20x - 2x^3 = 0$ ή
$5x^3 - 20x = 0$ ή $5x(x - 2)(x + 2) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x = 2$ ή $x = -2$

Θέμα 3ο

•$A = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 2^2) = x^2(x + 2)(x - 2)$
•$B = 2x^3 - x^2 - 8x + 4 = x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = (2x - 1)(x - 1)(x + 2)$

• $A - B = x^2(x+2)(x-2) - (2x-1)(x-2)(x+2) =$
$= (x+2)(x-2)\cdot[x^2 - (2x-1)] = (x+2)(x-2)(x^2 - 2x + 1) =$
$= (x+2)(x-2)(x-1)^2$

Α.1.9

«Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις»

ΘΕΩΡΙΑ

1. Ορισμός ρητής παράστασης

Μια αλγεβρική παράσταση $\left[\text{όπως π.χ. οι } \frac{x^3+1}{x-2}, \frac{x-y-1}{x^2+1}, \frac{10y^2\omega}{x^2+y}, \frac{1}{xy-2}\right]$ που είναι κλάσμα και οι όροι του είναι πολυώνυμα, λέγεται **ρητή αλγεβρική παράσταση** ή απλά **ρητή παράσταση**.

2. Περιορισμοί

Στην παράσταση $\frac{4}{x-3}$, το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 3, αφού για $x = 3$ ο παρανομαστής $x - 3$ γίνεται ίσος με 0.
Γενικά, σε μια (ρητή) παράσταση οι μεταβλητές της δεν μπορούν να πάρουν τις τιμές εκείνες για τις οποίες ο παρανομαστής γίνεται ίσος με το 0 (αφού δεν ορίζεται κλάσμα με παρανομαστή το 0).

Παραδείγματα:

- Στην παράσταση $\frac{3x-6}{x}$, το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0.
- Στην παράσταση $\frac{x-2}{x-10}$, το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή 10.
- Στην παράσταση $\frac{3x}{2y-10}$, το y δεν μπορεί να πάρει την τιμή 5.
- Στην παράσταση $\frac{10}{t+2}$, το t δεν μπορεί να πάρει την τιμή –2.

Σχόλιο Στη συνέχεια, όταν γράφουμε μια ρητή παράσταση, θα εννοούμε ότι οι μεταβλητές της δεν παίρνουν τιμές που μηδενίζουν τον παρανομαστή της.

3. Απλοποίηση

Αν σε ένα κλάσμα και οι δύο όροι του (αριθμητής και παρανομαστής) είναι γινόμενα, και στα γινόμενα αυτά υπάρχει κοινός παράγοντας, τότε ο παράγοντας αυτός μπορεί να απλοποιηθεί (παραληφθεί) και το κλάσμα να πάρει απλούστερη μορφή.

Αυτό εξηγείται ως εξής: $\frac{α \cdot β}{α \cdot γ} = \frac{α}{α} \cdot \frac{β}{γ} = 1 \cdot \frac{β}{γ} = \frac{β}{γ}$.

Παραδείγματα:

- $\frac{3xy}{5xα^2} = \frac{3y}{5α^2}$
- $\frac{2x^3α}{5x^3y} = \frac{2α}{5y}$
- $\frac{3x(x+2)}{4(x-3)} = \frac{3(x+2)}{4(x-3)} = \frac{3x+6}{4x-12}$
- $\frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2}{3}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

04 Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{2}{x}$ **β)** $\frac{x}{y-2}$ **γ)** $\frac{4}{β+2}$ **δ)** $\frac{x-2}{3α+1}$ **ε)** $\frac{x-3}{(x-2)(x-5)}$

.

ΛΥΣΗ

α) Το κλάσμα $\frac{2}{x}$ δεν ορίζεται όταν ο παρανομαστής είναι ίσος με 0, δηλαδή όταν $x = 0$.

β) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν $y - 2 = 0$, δηλαδή όταν $y = 2$.

γ) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν $β + 2 = 0$, δηλαδή όταν $β = -2$.

δ) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν $3α + 1 = 0$, δηλαδή όταν $3α = -1$, δηλαδή $α = -\frac{1}{3}$.

ε) Το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν $(x-2)(x-5) = 0$. Η σχέση $(x-2)(x-5) = 0$ ισχύει όταν $x - 2 = 0$ ή $x - 5 = 0$, δηλαδή όταν $x = 2$ ή $x = 5$. Επομένως, το κλάσμα αυτό δεν ορίζεται όταν $x = 2$, $x = 5$.

05. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{10}{x-6}$ **β)** $\frac{y-10}{3y-2}$ **γ)** $\frac{x-2}{(x+1)^2}$ **δ)** $\frac{5x+10}{x(x-2)}$ **ε)** $\frac{1-x^2}{y-x^2}$.

ΛΥΣΗ

Η παράσταση που έχουμε κάθε φορά ορίζεται αν:

α) $x - 6 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 6$

β) $3y - 2 \neq 0$, δηλαδή $y \neq \frac{2}{3}$

γ) $(x + 1)^2 \neq 0$, δηλαδή $x + 1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq -1$

δ) $x(x - 2) \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x - 2 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 2$.

ε) $y - x^2 \neq 0$, δηλαδή $y \neq x^2$.

06 Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες δεν ορίζεται η αριθμητική τιμή, σε καθεμία από τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{1 + \dfrac{3}{x - 2}}{x - 5}$ **β)** $\dfrac{x - 4}{\dfrac{2}{x} - 1}$ **γ)** $(x - 4) : \left(\dfrac{2}{x} - 1\right)$

ΛΥΣΗ

α) Στην παράστασή μας, υπάρχουν παρανομαστές οι $x - 2$ και $x - 5$. Επομένως, η παράστασή μας δεν ορίζεται όταν $x - 2 = 0$ ή $x - 5 = 0$, δηλαδή όταν $x = 2$ ή $x = 5$.

β) Στην παράστασή μας, υπάρχουν οι παρανομαστές, οι x και $\frac{2}{x} - 1$. Επομένως, η παράστασή μας δεν ορίζεται όταν $x = 0$ ή $\frac{2}{x} - 1 = 0$, δηλαδή όταν $x = 0$ ή $\frac{2}{x} = 1$, δηλαδή όταν $x = 0$ ή $x = 2$.

γ) Η παράσταση $(x - 4) : \left(\frac{2}{x} - 1\right)$ είναι ένας άλλος τρόπος γραφής της παράστασης $\dfrac{x - 4}{\frac{2}{x} - 1}$. Επομένως, ισχύουν όσα ακριβώς είπαμε στο β, και έτσι η παράσταση αυτή δεν ορίζεται όταν $x = 0$, καθώς και όταν $x = 2$.

07 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{8x^6}{12x^2}$ **β)** $\dfrac{5\alpha^2}{10\alpha^6}$ **γ)** $\dfrac{10x^2y}{15xy^3}$ **δ)** $\dfrac{2(x + 1)^5}{8(x + 1)^2}$

ΛΥΣΗ

α) $\dfrac{8x^6}{12x^2} = \dfrac{4 \cdot 2 \cdot x^2 \cdot x^4}{3 \cdot 4 \cdot x^2} = \dfrac{2x^4}{3}$ β) $\dfrac{5\alpha^2}{10\alpha^6} = \dfrac{5 \cdot \alpha^2}{2 \cdot 5 \cdot \alpha^2 \cdot \alpha^4} = \dfrac{1}{2\alpha^4}$

γ) $\dfrac{10x^2y}{15xy^3} = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y}{3 \cdot 5 \cdot x \cdot y \cdot y^2} = \dfrac{2x}{3y^2}$

δ) $\dfrac{2(x+1)^5}{8(x+1)^2} = \dfrac{2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x+1)^3}{2 \cdot 4 \cdot (x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^3}{4}$.

08 **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}$ **β)** $\dfrac{xy - y}{5y^2}$ **γ)** $\dfrac{5(x-2) + (x-2)y}{y^2 - 25}$

δ) $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$ **στ)** $\dfrac{5x - 5y + \alpha x - \alpha y}{x^2 - xy}$ **στ)** $\dfrac{x^4 - y^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4}$

ΛΥΣΗ

α) $\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2} = \dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha+\beta)^2} = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$

β) $\dfrac{xy - y}{5y^2} = \dfrac{y(x-1)}{5y^2} = \dfrac{x-1}{5y}$

γ) $\dfrac{5(x-2) + (x-2)y}{y^2 - 25} = \dfrac{(x-2)(5+y)}{y^2 - 5^2} = \dfrac{(x-2)(5+y)}{(y+5)(y-5)} = \dfrac{x-2}{y-5}$

δ) $\dfrac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16} = \dfrac{x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2}{x^2 - 4^2} = \dfrac{(x-4)^2}{(x+4)(x-4)} = \dfrac{x-4}{x+4}$

ε) $\dfrac{5x - 5y + \alpha x - \alpha y}{x^2 - xy} = \dfrac{5(x-y) + \alpha(x-y)}{x(x-y)} = \dfrac{(x-y)(5+\alpha)}{x(x-y)} = \dfrac{5+\alpha}{x}$

στ) $\dfrac{x^4 - y^4}{x^4 - 2x^2y^2 + y^4} = \dfrac{(x^2)^2 - (y^2)^2}{(x^2)^2 - 2x^2y^2 + (x^2)^2} =$

$= \dfrac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{(x^2 - y^2)^2} = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

09 **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:**

α) $\dfrac{x + y}{-x - y}$ **β)** $\dfrac{x - y}{y - x}$ **γ)** $\dfrac{2x - 2y}{3y - 3x}$

ΛΥΣΗ

α) $\dfrac{x+y}{-x-y} = \dfrac{x+y}{-(x+y)} = \dfrac{1 \cdot (x+y)}{-1 \cdot (x+y)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

β) $\dfrac{x-y}{y-x} = \dfrac{x-y}{-(x-y)} = -1.$

γ) $\frac{2x-2y}{3y-3x} = \frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{2(x-y)}{-3(x-y)} = \frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$

Σχόλιο: Θυμίζουμε ότι μια διαφορά β – α μπορεί να γραφεί και ως β – α = – α + β = –(α – β).

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

10. Όταν σε μια αλγεβρική παράσταση εμφανίζονται ένα ή περισσότερα κλάσματα, τότε, για να ορίζεται η παράσταση αυτή, πρέπει όλοι οι παρανομαστές που εμφανίζονται σε αυτή να είναι $\neq 0$.

Για παράδειγμα, για να ορίζεται η παράσταση $\dfrac{\frac{x-10}{x-5}+1}{\frac{6}{x}-3}$ πρέπει:
$x - 5 \neq 0$ **και** $x \neq 0$ **και** $\frac{6}{x} = -3 \neq 0$.

11. Τονίζουμε ότι, για να γίνει απλοποίηση σ' ένα κλάσμα, πρέπει και ο αριθμητής και ο παρανομαστής να είναι γινόμενα, και στα γινόμενα αυτά να υπάρχει κοινός (= ο ίδιος) παράγοντας, ο οποίος και απλοποιείται (παραλείπεται).

Αν ο ένας (τουλάχιστον) από τους όρους του κλάσματος δεν είναι γινόμενο, τότε στο κλάσμα αυτό δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση. Έτσι:

- στο κλάσμα $\frac{αβ+γ}{αδ}$ δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση του α (ο αριθμητής δεν είναι γινόμενο · το α είναι παράγοντας του όρου αβ, αλλά δεν είναι παράγοντας σε όλο τον αριθμητή).
- στο κλάσμα $\frac{αβ}{αγ+δ}$ δεν μπορεί να γίνει απλοποίηση του α (ο παρανομαστής δεν είναι γινόμενο).
- το κλάσμα $\frac{αβ+αγ}{αδ}$ δεν είναι ίσο με $\frac{β+αγ}{δ}$, ούτε με $\frac{αβ+γ}{δ}$.

  Ισχύει όμως $\frac{αβ+αγ}{αδ} = \frac{α(β+γ)}{αδ} = \frac{β+γ}{δ}$.

Γενικά, **για να απλοποιήσουμε ένα κλάσμα, πρέπει τώρα να παραγοντοποιήσουμε και τους δύο όρους του.**

Στο κλάσμα $\frac{2(α+β)}{α+β}$ μπορεί να γίνει απλοποίηση του α + β, αφού και ο αριθμητής και ο παρανομαστής μπορούν να γραφούν σε μορφή γινομένου, έτσι ώστε το α + β να αποτελεί παράγοντα και των δύο όρων.

Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta} = \frac{2\cdot(\alpha+\beta)}{1\cdot(\alpha+\beta)} = \frac{2}{1} = 2.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

12. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη Β, για τις οποίες ορίζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{1}{4x}$	1. $x \neq 3$
β. $\frac{x+2}{x-2}$	2. $x \neq 2$ και $x \neq -2$
γ. $\frac{x+3}{(x-2)(x+2)}$	3. $x \neq 0$
δ. $\frac{2(x-3)}{x-3}$	4. Οποιοσδήποτε αριθμός
	5. $x \neq -2$
	6. $x \neq 4$
	7. $x \neq 2$

α	β	γ	δ

13. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α τις τιμές της μεταβλητής της από τη στήλη Β, για τις οποίες δεν ορίζεται.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{2}{x}$	1. $x = 0$
β. $\frac{3x-3}{x+1}$	2. $x = 2$
γ. $\frac{2x}{x^2-1}$	3. $x = 1$
δ. $\frac{5(x-1)}{x-1}$	4. $x = 3$
	5. $x = -1$
	6. $x = 5$
	7. $x = 1$ ή $x = -1$

α	β	γ	δ

14. Σε καθεμία από τις παρακάτω ισότητες, να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (Λανθασμένη).

α) $\frac{x^2+2}{2x} = x$ Σ Λ

β) $\frac{x(x+2)}{2x} = \frac{x+2}{2}$ Σ Λ

γ) $\frac{(x+3)(x+5)}{2(x+3)} = \frac{x+5}{2}$ Σ Λ

δ) $\frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha+\beta} = \alpha-\beta$ Σ Λ

ε) $\frac{x+3(x-2)}{5(x-2)} = \frac{x+3}{5}$ Σ Λ

στ) $\frac{(\alpha-\beta)^3}{2(\alpha-\beta)} = \frac{3}{2}$ Σ Λ

ζ) $\frac{2(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)} = 2(\alpha+\beta)$ Σ Λ

15. Να συμπληρώσετε τα κενά στις ισότητες:

α) $\frac{5x}{x(\ldots\ldots)} = \frac{5}{x-1}$ β) $\frac{2(\alpha+3\beta)\cdot(\ldots\ldots)}{(\alpha-3\beta)\cdot(\ldots\ldots)} = 2$

γ) $\frac{x(x+2)}{\ldots\ldots} = x+2$ δ) $\frac{x^2-4}{\ldots\ldots} = x+2$

ε) $\frac{3(\ldots\ldots)}{4(\alpha-\beta)^2} = \frac{3}{4(\alpha-\beta)}$ στ) $\frac{2\cdot(\alpha^2-\beta^2)}{3(\ldots\ldots)^2} = \frac{2(\alpha-\beta)}{3(\alpha+\beta)}$

ζ) $\frac{2(x+1)}{\ldots\ldots} = \frac{2}{x+1}$ η) $\frac{3(\ldots\ldots)}{(x+2)^2} = \frac{3}{x+2}$

Ασκήσεις και προβλήματα για λύση

16. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{1-3}$ β) $\frac{y+5}{2y-7}$ γ) $\frac{\omega-3}{(\omega-2)^2}$

δ) $\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+3)^2}$ ε) $\frac{7x+12}{x(x-1)}$ στ) $\frac{6x+5}{(x-1)(x+2)}$

17. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 - 5x + 13}{x}$ β) $\frac{x^2 + 7}{x - 2}$ γ) $\frac{x^3 + 5}{x + 3}$

δ) $\frac{x^2 - 8}{x(x + 4)}$ ε) $\frac{x^2 + 4}{(x - 2)(x + 3)}$ στ) $\frac{x^2 + y^2}{x - 2y}$

18. Να βρείτε τις τιμές μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{2}{x}$ β) $\frac{y}{x - 3}$ γ) $\frac{3\alpha}{2x - 1}$

δ) $\frac{5\beta}{2x + 3}$ ε) $\frac{\alpha - \beta}{5\alpha - 3}$ στ) $\frac{5x + 20}{(x - 3)(3x + 4)}$

ζ) $\frac{1}{\frac{x - 1}{x}}$

19. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{1}{2x}$ β) $\frac{\alpha}{2 - x}$ γ) $\frac{3x}{2\alpha + 1}$

δ) $\frac{x - y}{1 - 3\alpha}$ ε) $\frac{x + y}{(x - 3)^2}$ στ) $\frac{3x - 1}{(2x - 1)(1 - 4x)}$ ζ) $\frac{\frac{2}{x}}{x - 2}$

20. Να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών για τις οποίες δεν ορίζονται οι παραστάσεις:

α) $\frac{20}{y}$ β) $\frac{\alpha - 2}{2 - \alpha}$ γ) $\frac{4x}{4x - 1}$

δ) $\frac{3x}{1 - 5x}$ ε) $\frac{1}{(x - 1)(3x + 7)}$ στ) $x/x^2 - 1$ ζ) $\frac{1}{\frac{x^2 - 1}{x}}$

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{3x}{5x}$ β) $\frac{7\omega}{28\omega^3}$ γ) $\frac{10\alpha\beta}{40\beta^2}$

δ) $\frac{2x^5}{16x^3}$ ε) $\frac{5(x + 1)^3}{10(x + 1)^5}$ στ) $\frac{3(\beta + 2)^2}{6(\beta + 2)^3}$

22. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\frac{60x^2}{90x}$ β) $\frac{6\alpha\beta^2}{2\alpha\beta^3\gamma}$ γ) $\frac{-24\alpha^5x^3y^2}{-30\alpha^5xy^4}$

δ) $\dfrac{4\alpha - 4\beta}{3\beta - 3\alpha}$ ε) $\dfrac{8x^2 - 2xy}{4xy - y^2}$ στ) $\dfrac{x^4 - x^2}{x^3 + x^2}$

23. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{2\alpha - 6}{\alpha^2 - 3\alpha}$ β) $\dfrac{\alpha - 2}{4 - \alpha^2}$ γ) $\dfrac{x + 3}{x^2 + 6x + 9}$

δ) $\dfrac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 2x}$ ε) $\dfrac{2y^2 - 32}{16 - 8y + y^2}$ στ) $\dfrac{3x^4 - 3y^4}{x^2 + 2xy + y^2}$

24. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{5x - 10}{x^2 - 4}$ β) $\dfrac{(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}$ γ) $\dfrac{\alpha\beta + \beta\alpha}{\alpha^2\beta + \alpha\beta^2}$

25. Να γίνουν οι απλοποιήσεις:

α) $\dfrac{\alpha^5\beta^3\gamma^6 - \alpha^2\beta^3\gamma^4}{\alpha^2\beta^3\gamma^4 - \alpha^4\beta^3\gamma^5}$ β) $\dfrac{x^2 - x\sqrt{12} + 3}{2x^2 - x\sqrt{12}}$

26. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha(\alpha - 3) + 4(\alpha - 3)}{\alpha^2 - 9}$ β) $\dfrac{2\alpha - 2\beta + \alpha x - \beta x}{\beta^2 - \alpha\beta}$

γ) $\dfrac{2\mu^2 - 18\nu^2}{2\mu^2 + 12\mu\nu + 18\nu^2}$ δ) $\dfrac{4\alpha^2 - 4\alpha\beta + 4\alpha\gamma}{2\alpha\beta - 2\beta^2 + 2\beta\gamma}$

ε) $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 6}$ στ) $\dfrac{\alpha^2 - \alpha - 20}{\alpha^2 - 25}$.

27. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{\alpha\beta - \alpha}{\beta^2 - \beta}$ β) $\dfrac{\alpha\beta + \beta}{\beta^2}$ γ) $\dfrac{x^3 + x^2y + x^2\omega}{x^2y^2 + xy^3 + xy^2\omega}$

δ) $\dfrac{x(x + 1) + 2(x + 1)}{x^3 + 8}$ ε) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha - 12}{\alpha^2 - 9}$ στ) $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$

28. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4x + 3}$ β) $\dfrac{(2x - 3y)^2}{9y^2 - 4x^2}$ γ) $\dfrac{3\alpha^3\beta + 3\alpha\beta^3 - 6\alpha^2\beta^2}{6\alpha^3\beta - 6\alpha\beta}$ 3

δ) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 2 - x}{x^2 - 3x + 2}$ ε) $\dfrac{(\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta}{\alpha^4 - \alpha\beta^3}$ στ) $\dfrac{\alpha^4\gamma - \beta^4\gamma}{2\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + 2\alpha\beta^2 - 2\beta^3}$

29. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{(x^2-1)^2}{(2x+2)^2}$ β) $\dfrac{x^2-y+xy-x}{x^3y+2x^2y^2+xy^3}$ γ) $\dfrac{x^2-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2-x^2+2\beta x}$

30. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\dfrac{x^2-5}{2x+\sqrt{20}}$ β) $\dfrac{x^2-x\sqrt{12}+3}{x\sqrt{3}-3}$

31. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{6xy^3+6x^3y+12x^2y^2}{3xy^3-3x^3y}$, β) $\dfrac{\alpha^4x-\beta^4x}{\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}$

32. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

α) $\dfrac{4+8+12+\ldots+400}{3+6+9+\ldots+300}$ β) $\dfrac{4x+8x+12x+\ldots+400y}{3x+6x+9x+\ldots+300x}$

Α.1.10.Α.

Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση ρητών παραστάσεων

01 Πολλαπλασιασμός

▶ Ο πολλαπλασιασμός μεταξύ δύο ρητών παραστάσεων γίνεται όπως και ο πολλαπλασιασμός κλασμάτων, σύμφωνα με τον τύπο $\frac{α}{β} \cdot \frac{γ}{δ} = \frac{α \cdot γ}{β \cdot δ}$

Παράδειγμα

$$\frac{3}{x^2} \cdot \frac{x+2}{x-4} = \frac{3 \cdot (x+2)}{x^2 \cdot (x-4)} = \frac{3x+6}{x^3 - 4x^2}$$

Επίσης, ο πολλαπλασιασμός μιας πολυωνυμικής με μια ρητή παράσταση γίνεται σύμφωνα με τους τύπους $λ \cdot \frac{α}{β} = \frac{λ \cdot α}{β}$ και $\frac{α}{β} \cdot μ = \frac{α \cdot μ}{β}$

Παραδείγματα

- $3x^2 \cdot \frac{4x}{x-10} = \frac{3x^2 \cdot 4x}{x-10} = \frac{12x^3}{x-10}$
- $\frac{3x^2}{x-1} \cdot 2x = \frac{3x^2 \cdot 2x}{x-1} = \frac{6x^3}{x-1}$

02 Διαίρεση

▶ Η διαίρεση δυο ρητών παραστάσεων γίνεται όπως και η διαίρεση κλασμάτων, σύμφωνα με τον τύπο $\frac{α}{β} : \frac{γ}{δ} = \frac{α}{β} \cdot \frac{δ}{γ} = \frac{α \cdot δ}{β \cdot γ}$

Παραδείγματα

- $\frac{3x}{2α} : \frac{4y}{5β} = \frac{3x}{2α} \cdot \frac{5β}{4y} = \frac{3x \cdot 5β}{2α \cdot 4y} = \frac{15βx}{8αy}$
- $\frac{3}{x-1} : \frac{2x}{5x+10} = \frac{3}{x-1} \cdot \frac{5x+10}{2x} = \frac{3 \cdot (5x+10)}{(x-1) \cdot 2x} = \frac{15x+30}{2x^2-2x}$
- Επίσης, ισχύουν: $\frac{α}{β} : λ = \frac{α}{β} : \frac{λ}{1} = \frac{α}{β} \cdot \frac{1}{λ} = \frac{α \cdot 1}{β \cdot λ} = \frac{α}{βλ}$

$μ : \frac{α}{β} = \frac{μ}{1} : \frac{α}{β} = \frac{μ}{1} \cdot \frac{β}{α} = \frac{μ \cdot β}{1 \cdot α} = \frac{μβ}{α}$

Παραδείγματα

- $\frac{2xy}{3α} : 5α^2β^4 = \frac{2xy}{3α} : \frac{5α^2β^4}{1} = \frac{2xy}{3α} \cdot \frac{1}{5α^2β^4} = \frac{2xy \cdot 1}{3α \cdot 5α^2β^4} = \frac{2xy}{15α^3β^4}$

- $\dfrac{3x+y}{x-2} : 5x^2 = \dfrac{3x+y}{x-2} : \dfrac{5x^2}{1} = \dfrac{3x+y}{x-2} \cdot \dfrac{1}{5x^2} = \dfrac{3x+y}{(x-2)} \cdot 5x^2 = \dfrac{3x+y}{5x^3-10x^2}$
- $3x^2y : \dfrac{2\alpha\beta}{5x^3} = \dfrac{3x^2y}{1} \cdot \dfrac{5x^3}{2\alpha\beta} = \dfrac{3x^2y \cdot 5x^3}{1 \cdot 2\alpha\beta} = \dfrac{15x^5y}{2\alpha\beta}$

Σχόλιο: Συνήθως, μετά τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση δύο ρητών παραστάσεων γράφουμε το αποτέλεσμα σε όσο γίνεται απλούστερη μορφή, κάνοντας όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

03 Σύνθετα κλάσματα

- ▶ Ένα κλάσμα του οποίου ο ένας τουλάχιστον όρος είναι επίσης κλάσμα, λέγεται **σύνθετο κλάσμα**.
- ▶ Ένα σύνθετο κλάσμα έχει τη μορφή $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}}$ ή $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma}$ ή $\dfrac{\alpha}{\frac{\gamma}{\delta}}$

Ένα σύνθετο κλάσμα μετατρέπεται σε απλό ως εξής:

$$\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma} = \dfrac{\text{γινόμενο των «άκρων» όρων α,δ}}{\text{γινόμενο των «μέσων» όρων β,γ}}$$

Αυτό ισχύει διότι $\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha}{\beta} : \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\alpha}{\beta} \cdot \dfrac{\delta}{\gamma} = \dfrac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$

Επομένως, έχουμε:

$$\dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \dfrac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{1}} = \dfrac{\alpha \cdot 1}{\beta \cdot \gamma} = \dfrac{\alpha}{\beta\gamma} \quad \text{και} \quad \dfrac{\alpha}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\frac{\alpha}{1}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \dfrac{\alpha \cdot \delta}{1 \cdot \gamma} = \dfrac{\alpha \cdot \delta}{1 \cdot \gamma} = \dfrac{\alpha\delta}{\gamma}$$

Παραδείγματα

- $\dfrac{\frac{5x}{3\alpha}}{\frac{2y}{7\beta}} = \dfrac{5x \cdot 7\beta}{3\alpha} \cdot 2y = \dfrac{35x\beta}{6\alpha y}$
- $\dfrac{\frac{5x}{3\alpha}}{2\beta} = \dfrac{\frac{5x}{3\alpha}}{\frac{2\beta}{1}} = \dfrac{5x}{3\alpha \cdot 2\beta} = \dfrac{5x}{6\alpha\beta}$
- $\dfrac{5x}{\frac{3\alpha}{2\beta}} = \dfrac{\frac{5x}{1}}{\frac{3\alpha}{2\beta}} = \dfrac{5x \cdot 2\beta}{3\alpha} = \dfrac{10x\beta}{3\alpha}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

04 **Να κάνετε τις πράξεις:**

α) $\frac{10\alpha}{x^{10}} \cdot \left(-\frac{x^2}{5\alpha}\right)$ **β)** $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{2x + 2y}{x + 2y}$

ΛΥΣΗ

α) $\frac{10\alpha}{x^{10}} \cdot \left(-\frac{x^2}{5\alpha}\right) = -\frac{10\alpha}{x^{10}} \cdot \frac{x^2}{5\alpha} = -\frac{10\alpha \cdot x^2}{x^{10}} \cdot 5\alpha = -\frac{2 \cdot 5\alpha \cdot x^2}{x^2 \cdot x^8 \cdot 5\alpha} = -\frac{2}{x^8}$

β) $\frac{x^2 - 4y^2}{x^2 + xy} \cdot \frac{2x + 2y}{x + 2y} = \frac{x^2 - (2y)^2}{x(x + y)} \cdot \frac{2(x + y)}{x + 2y} = \frac{(x + 2y)(x - 2y)2(x + y)}{x(x + y)(x + 2y)} =$

$= \frac{(x - 2y)2}{x} = \frac{2x - 4y}{x}$

05 **Να κάνετε τις διαιρέσεις:**

α) $\frac{6}{x^2 - y^2} : \frac{-3}{x + y}$ **β)** $\dfrac{\frac{\alpha^2 - 4\alpha}{x^3 - xy^2}}{\frac{\alpha^3 - 16\alpha}{x^2y + x^3}}$

ΛΥΣΗ

α) $\frac{6}{x^2 - y^2} : \frac{-3}{x + y} = \frac{6}{x^2 - y^2} \cdot \frac{x + y}{-3} = \frac{6(x + y)}{-3(x^2 - y^2)} = \frac{3 \cdot 2(x + y)}{-3(x + y)(x - y)} =$

$= \frac{2}{-(x - y)} = \frac{2}{y - x}$

β) $\dfrac{\frac{\alpha^2 - 4\alpha}{x^3 - xy^2}}{\frac{\alpha^3 - 16\alpha}{x^2y + x^3}} = \frac{(\alpha^2 - 4\alpha) \cdot (x^2y + x^3)}{x^3 - xy^2) \cdot (\alpha^3 - 16\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha - 4)x^2(y + x)}{x(x^2 - y^2)\alpha(\alpha^2 - 16)} =$

$= \frac{\alpha(\alpha - 4)x^2(y + x)}{x(x + y)(x - y)\alpha(\alpha + 4)(\alpha - 4)} = \frac{x}{(x - y)(\alpha + 4)}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

6. Για καθεμία από τις παρακάτω ισότητες να σημειώσετε το Σ(σωστή) ή το Λ (Λανθασμένη).

α) $\alpha \cdot \frac{x}{y} = \frac{\alpha x}{\alpha y}$	Σ	Λ
β) $\alpha \cdot \frac{x}{y} = \frac{\alpha x}{y}$	Σ	Λ
γ) $4x : \frac{3}{xy} = \frac{15}{y}$	Σ	Λ
δ) $5x : \frac{3}{xy} = \frac{5x^2y}{3}$	Σ	Λ
ε) $\frac{\alpha-\beta}{\gamma} \cdot \frac{\delta}{\alpha-\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$	Σ	Λ
στ) $\frac{3}{\alpha} \cdot \frac{x-1}{\alpha} = \frac{3x-1}{\alpha^2}$	Σ	Λ
ζ) $\frac{2x}{\alpha+\beta} \cdot \frac{3(\alpha+\beta)}{2x} = 3$	Σ	Λ
η) $\frac{x}{y+\omega} : \frac{x}{y+\omega} = 1$	Σ	Λ

7. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $5x \cdot \frac{\dots\dots}{2y} = \frac{15x^3}{2y}$ β) $\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\dots\dots}{\delta} = \frac{\alpha\beta}{\delta}$

γ) $\frac{5\alpha}{\beta} : \frac{\dots\dots}{\delta} = \frac{\delta}{2\beta}$ δ) $\frac{x+y}{x-\omega} \cdot \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$

ε) $\frac{x-y}{x+\omega} : \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = 1$ στ) $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\alpha+\beta}{\dots\dots} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$

8. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας κάθε παράσταση της στήλης Α στο αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{x}$	1. $\frac{4}{5y}$
β. $\frac{16x}{5y} \cdot \frac{1}{4x}$	2. $\frac{y^2}{2x^2}$
γ. $\frac{10x}{y} : \frac{12}{x}$	3. $\frac{y^2}{x^2}$
δ. $\frac{y}{x^2} : \frac{2}{y}$	4. $\frac{1}{xy}$
	5. $\frac{6y}{5x^2}$
	6. $\frac{5x^2}{6y}$

α	β	γ	δ