Κεφαλαιο 1ο

Γεωμετρία

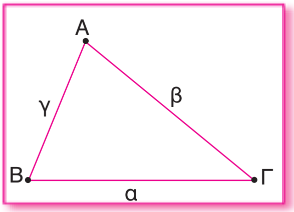
1.1 Ισότητα τριγώνων

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου – Είδη τριγώνων

Τα **κύρια στοιχεία** ενός τριγώνου είναι οι **πλευρές** και οι **γωνίες** του.

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ συμβολίζουμε τις πλευρές του ως εξής:

ΑΒ = γ (γιατί η ΑΒ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Γ),
ΑΓ = β (γιατί η ΑΓ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Β),
ΒΓ = α (γιατί η ΒΓ βρίσκεται απέναντι από τη γωνία Α).



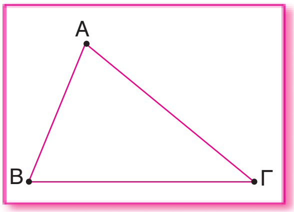
Ορισμοί

1. **Περιεχόμενη γωνία** δύο πλευρών ενός τριγώνου ονομάζεται η γωνία που περιέχεται ανάμεσα στις δύο πλευρές.
2. **Προσκείμενες γωνίες** μιας πλευράς ενός τριγώνου ονομάζονται οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα της πλευράς.

Παραδείγματα

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι:

- ➢ Η γωνία Α είναι **περιεχόμενη** στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ.
- ➢ Η γωνία Β είναι **περιεχόμενη** στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ.
- ➢ Η γωνία Γ είναι **περιεχόμενη** στις πλευρές ΓΒ, ΑΓ.
- ❖ Οι γωνίες Α, Β είναι **προσκείμενες** στην πλευρά ΑΒ.
- ❖ Οι γωνίες Γ, Β είναι **προσκείμενες** στην πλευρά ΓΒ.
- ❖ Οι γωνίες Α, Γ είναι **προσκείμενες** στην πλευρά ΑΓ.



Πρόταση

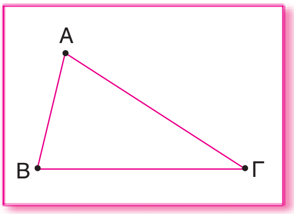
Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\boxed{\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ}$.

Διαχωρισμός τριγώνων σε σχέση με τις γωνίες του

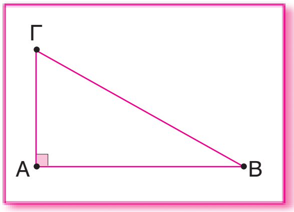
Ορισμοί

1. **Οξυγώνιο** λέγεται κάθε τρίγωνο στο οποίο όλες οι γωνίες του είναι οξείες.
2. **Ορθογώνιο** λέγεται κάθε τρίγωνο που έχει μία ορθή γωνία.
3. **Αμβλυγώνιο** λέγεται κάθε τρίγωνο που έχει μία γωνία αμβλεία.

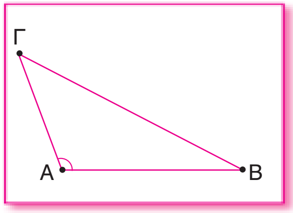
Οξυγώνιο



Ορθογώνιο



Αμβλυγώνιο

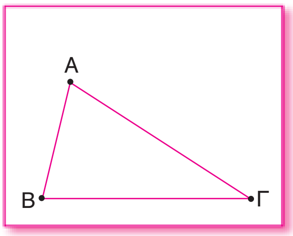


Διαχωρισμός τριγώνων σε σχέση με τις πλευρές του

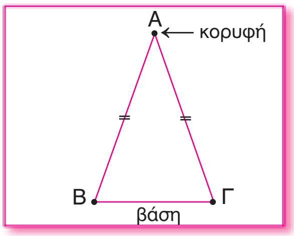
Ορισμοί

1. **Σκαληνό** λέγεται κάθε τρίγωνο στο οποίο όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
2. **Ισοσκελές** λέγεται κάθε τρίγωνο που έχει δύο πλευρές ίσες. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η πλευρά που δεν είναι ίση με καμία άλλη λέγεται **βάση** και η κοινή κορυφή των ίσων πλευρών λέγεται **κορυφή** του τριγώνου.
3. **Ισόπλευρο** λέγεται κάθε τρίγωνο που έχει τρεις πλευρές ίσες.

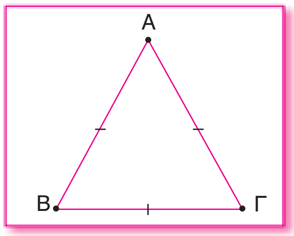
Σκαληνό



Ισοσκελές



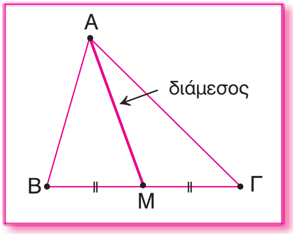
Ισόπλευρο

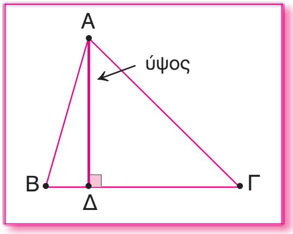


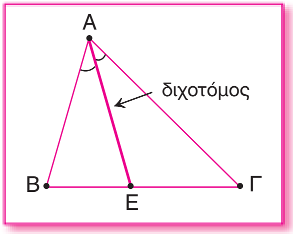
Τα **δευτερεύοντα στοιχεία** ενός τριγώνου είναι οι **διάμεσοι**, οι **διχοτόμοι** και τα **ύψη**.

Ορισμοί

1. **Διάμεσος** από μία κορυφή ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς.
2. **Διχοτόμος** μιας γωνίας ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα την κορυφή της γωνίας και σημείο της απέναντι πλευράς που χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες.
3. **Ύψος** από μία κορυφή ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή με την απέναντι πλευρά κάθετα.







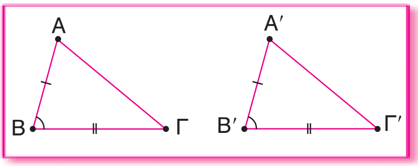
Ίσα τρίγωνα

Ορισμός

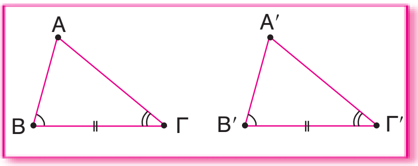
Ίσα τρίγωνα ονομάζονται δύο τρίγωνα που έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

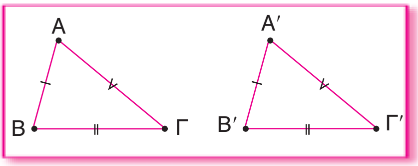
1ο κριτήριο ισότητας (Π – Γ – Π)
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



2ο κριτήριο ισότητας (Γ – Π – Γ)
Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.



3ο κριτήριο ισότητας (Π – Π – Π)
Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

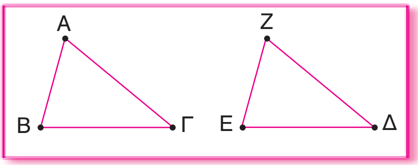


Παρατήρηση

Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές και αντιστρόφως.

Παράδειγμα

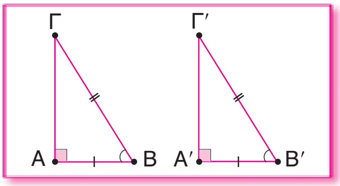
Αν έχουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ, όπου ΑΒ = ΕΖ, ΒΓ = ΔΕ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$, αυτά είναι ίσα (αφού έχουμε δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), άρα:

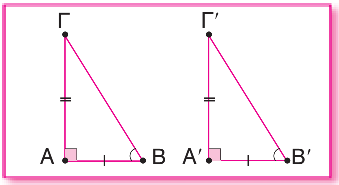


- ΑΓ = ΖΔ (απέναντι από τις ίσες γωνίες Β και Ε).
- $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΕΖ).
- $\hat{Α} = \hat{Ζ}$ (απέναντι από τις ίσες πλευρές ΓΒ, ΕΔ).

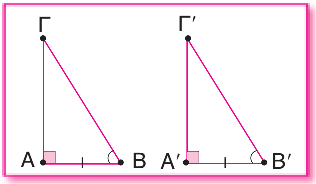
Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

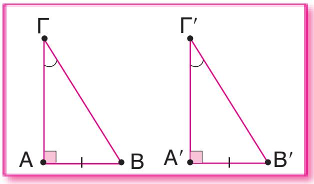
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα στα οποία δύο πλευρές του ενός είναι ίσες μία προς μία προς δύο αντίστοιχες πλευρές του άλλου είναι μεταξύ τους ίσα.

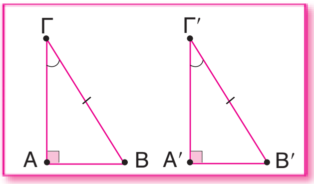




- Δύο ορθογώνια τρίγωνα στα οποία μία πλευρά του ενός είναι ίση προς μία αντίστοιχη πλευρά του άλλου και έχουν μία αντίστοιχη οξεία γωνία τους ίση (απέναντι ή προσκείμενη) είναι μεταξύ τους ίσα.





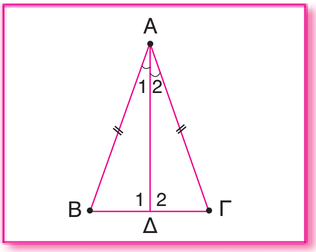


Βασικές εφαρμογές

1. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:
α) οι γωνίες της βάσης του είναι ίσες,
β) η διχοτόμος από την κορυφή προς τη βάση του είναι ύψος και διάμεσος.

Απόδειξη

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ.



α) Τότε $\overset{\triangle}{ΑΒΔ} = \overset{\triangle}{ΑΔΓ}$, γιατί:

i) ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση),

ii) ΑΔ κοινή,

iii) $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$ (ΑΔ διχοτόμος),

άρα από Π – Γ – Π ισχύει $\hat{Β} = \hat{Γ}$.

β) Αφού $\overset{\triangle}{AB\Delta} = \overset{\triangle}{A\Delta\Gamma}$, έχουμε ότι: $B\Delta = \Delta\Gamma$, άρα $A\Delta$ διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Όμως, $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$, άρα $2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ$, οπότε $\hat{\Delta}_1 = 90^\circ$, που σημαίνει ότι το $A\Delta$ είναι και ύψος.

2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.

3. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος.

Η απόδειξη των εφαρμογών 2 και 3 παρουσιάζεται στην 1η και στη 2η λυμένη άσκηση αντίστοιχα.

4. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω τμήμα ΑΒ, Μ το μέσο του ΑΒ και (ε) η μεσοκάθετος του ΑΒ.

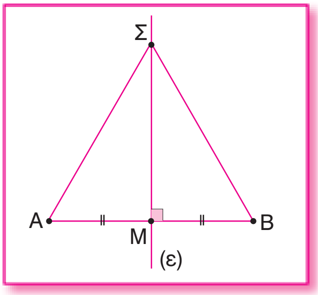
Θεωρούμε σημείο Σ της ευθείας (ε). Τότε:

$\overset{\triangle}{\Sigma AM} = \overset{\triangle}{\Sigma BM}$, γιατί: **i)** ορθογώνια,

ii) $MA = MB$ (Μ μέσο του ΑΒ),

iii) ΣΜ κοινή,

άρα $\Sigma A = \Sigma B$.



5. Αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, τότε είναι σημείο της μεσοκαθέτου.

Η απόδειξη της εφαρμογής 5 παρουσιάζεται στην 3η λυμένη άσκηση.

6. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Απόδειξη

Θεωρούμε γωνία xOy και τη διχοτόμο της Oδ, οπότε: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$.

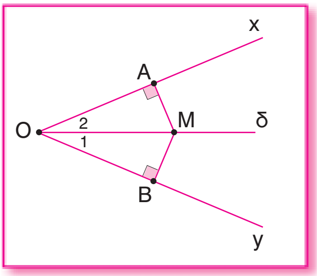
Έστω σημείο Μ της Oδ, όπου φέρνουμε τα $MA \perp Ox$ και $MB \perp Oy$.

Τότε $\overset{\triangle}{OAM} = \overset{\triangle}{OBM}$, γιατί: **i)** ορθογώνια,

ii) ΟΜ κοινή,

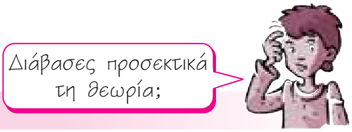
iii) $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$,

άρα $AM = MB$, οπότε το Μ ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.



7. Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

Η απόδειξη της εφαρμογής 7 παρουσιάζεται στην 4η λυμένη άσκηση.



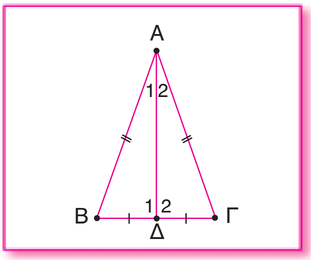
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α′ ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ, ΓΩΝΙΩΝ, ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Μέθοδος

Συνήθως, όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ισότητα γωνιών (ή ευθύγραμμων τμημάτων), προσπαθούμε τις γωνίες (ή τα τμήματα) να τις «δούμε» ως γωνίες (ή πλευρές) σε δύο τρίγωνα, τα οποία να μπορούν να αποδειχθούν ίσα με τη βοήθεια κάποιου κριτηρίου ισότητας τριγώνων.

1 **Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση είναι ύψος και διχοτόμος.**



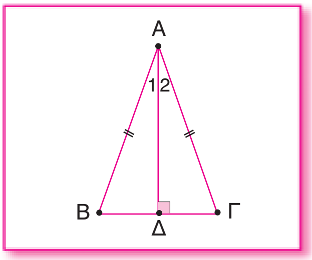
ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ.

Τότε $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Δ} = \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$, γιατί: **i)** ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση),
ii) ΑΔ κοινή,
iii) ΒΔ = ΔΓ, (ΑΔ διάμεσος),

άρα $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2$, δηλαδή ΑΔ διχοτόμος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, όπου $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$, οπότε $2\hat{\Delta}_1 = 180^\circ$ και $\hat{\Delta}_1 = 90^\circ$, που σημαίνει ότι το ΑΔ είναι και ύψος.

2 **Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος.**



ΛΥΣΗ

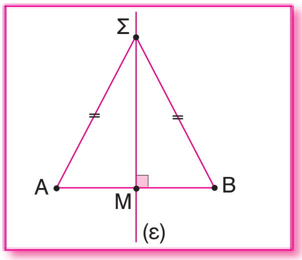
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και φέρνουμε το ύψος ΑΔ.

Τότε $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Δ} = \text{Α}\hat{\text{Δ}}\text{Γ}$, γιατί: **i)** ΑΒ = ΑΓ (υπόθεση),
ii) ΑΔ κοινή,
iii) ορθογώνια,

άρα $\hat{\text{Α}}_1 = \hat{\text{Α}}_2$, δηλαδή ΑΔ διχοτόμος, και ΒΔ = ΔΓ, δηλαδή ΑΔ και διάμεσος.

3 **Αν ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθύγραμμου τμήματος, τότε είναι σημείο της μεσοκαθέτου.**

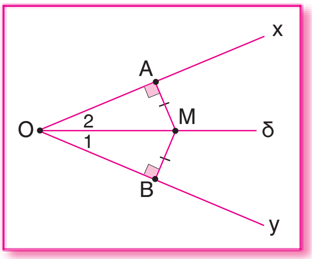
ΛΥΣΗ



Έστω τμήμα ΑΒ και σημείο Σ, έτσι ώστε ΣΑ = ΣΒ.
Θεωρούμε την ευθεία ΣΜ ⊥ ΑΒ. Τότε:
$\Sigma\hat{A}M = \Sigma\hat{M}B$, γιατί: **i)** ορθογώνια,
ii) ΣΑ = ΣΒ (Μ μέσο του ΑΒ),
iii) ΣΜ κοινή,
άρα ΜΑ = ΜΒ, δηλαδή το Μ είναι μέσο του ΑΒ και, αφού ΣΜ ⊥ ΑΒ, η ευθεία ΣΜ είναι μεσοκάθετος και το σημείο Σ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.

4 **Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.**

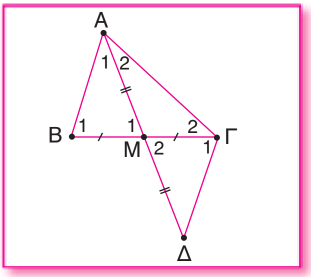
ΛΥΣΗ



Θεωρούμε γωνία xOy και σημείο Μ, τέτοιο ώστε ΜΑ = ΜΒ, όπου ΜΑ ⊥ Οx και ΜΒ ⊥ Oy.
Φέρνουμε την ημιευθεία Οδ που ενώνει τα σημεία Ο και Μ. Τότε:
$O\hat{A}M = O\hat{B}M$, γιατί: **i)** ορθογώνια,
ii) ΟΜ κοινή,
iii) ΜΑ = ΜΒ,
άρα $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η Οδ είναι διχοτόμος της γωνίας xOy.

5 **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα ΜΔ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι: ΑΒ = ΓΔ.**

ΛΥΣΗ



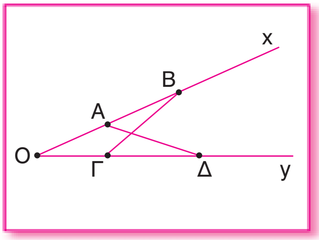
Αφού η ΑΜ είναι διάμεσος στο ΑΒΓ, θα έχουμε ότι: ΒΜ = ΜΓ. Τότε:
$B\hat{A}M = \Gamma\hat{\Delta}M$, γιατί: **i)** ΒΜ = ΜΓ (υπόθεση),
ii) ΑΜ = ΔΜ (υπόθεση),
iii) $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν),
άρα από Π – Γ – Π θα έχουμε:
ΑΒ = ΓΔ, $\hat{A}_1 = \hat{\Delta}$ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

6 **Δίνεται γωνία xOy και σημεία Α, Β στην Οx και τα σημεία Γ, Δ στην ημιευθεία Oy, έτσι ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι: ΑΔ = ΒΓ και $x\hat{A}\Delta = y\hat{\Gamma}B$.**

ΛΥΣΗ

$O\hat{A}\Delta = O\hat{B}\Gamma$, γιατί: **i)** $OA = O\Gamma$ (υπόθεση),
ii) $OB = O\Delta$ (υπόθεση),
iii) $\hat{O}$ κοινή,

άρα από Π – Γ – Π: $A\Delta = B\Gamma$ και $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Gamma}B$.
Όμως $O\hat{A}\Delta = O\hat{\Gamma}B$, άρα:
$180^\circ - O\hat{A}\Delta = 180^\circ - O\hat{\Gamma}B$, οπότε: $x\hat{A}\Delta = y\hat{\Gamma}B$.



7 **Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΒ = Α′Β′, ΒΓ = Β′Γ′ και ΑΓ = Α′Γ′ να αποδείξετε ότι τα ύψη, οι διάμεσοι και οι διχοτόμοι από τις κορυφές Α, Α′ είναι αντίστοιχα ίσα μεταξύ τους.**

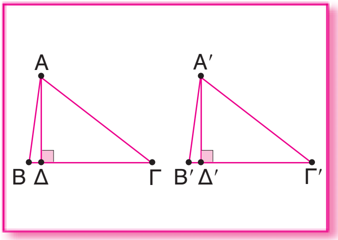
ΛΥΣΗ

Τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ είναι ίσα, αφού έχουν όλες τις πλευρές τους ίσες, οπότε θα ισχύει: $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

<u>*1η περίπτωση:*</u> Έστω ΑΔ, Α′Δ′ τα αντίστοιχα ύψη από τις κορυφές Α, Α′. Τότε:

$A\hat{\Delta}\Gamma = A'\hat{\Delta}'\Gamma'$, γιατί: **i)** ορθογώνια,
ii) $A\Gamma = A'\Gamma'$,
iii) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

άρα: $A\Delta = A'\Delta'$.



<u>*2η περίπτωση:*</u> Έστω ΑΔ, Α′Δ′ οι αντίστοιχες διάμεσοι από τις κορυφές Α, Α′. Τότε:

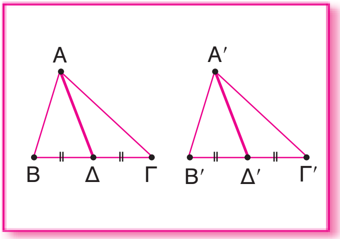
$A\hat{\Delta}\Gamma = A'\hat{\Delta}'\Gamma'$, γιατί:

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

ii) $A\Gamma = A'\Gamma'$,

iii) $\Delta\Gamma = \Delta'\Gamma'\left(\frac{1}{2}B\Gamma = \frac{1}{2}B'\Gamma'\right)$,

άρα από Π – Γ – Π έχουμε: $A\Delta = A'\Delta'$.



<u>*3η περίπτωση:*</u> Έστω ΑΔ, Α′Δ′ οι αντίστοιχες διχοτόμοι προς τις α, α′. Τότε:

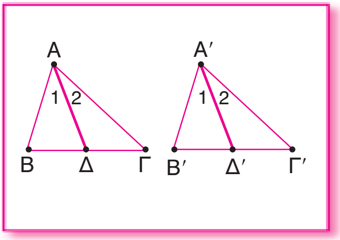
$A\hat{\Delta}\Gamma = A'\hat{\Delta}'\Gamma'$, γιατί:

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

ii) $A\Gamma = A'\Gamma'$,

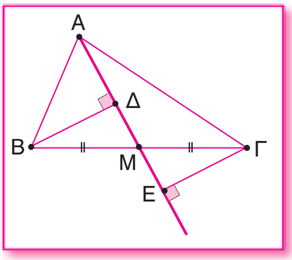
iii) $\hat{A}_2 = \hat{A}'_2 \left(\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2}\right)$,

άρα από Γ – Π – Γ έχουμε: $A\Delta = A'\Delta'$.



8 **Να αποδείξετε ότι οι κορυφές Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ισαπέχουν από τη διάμεσο ΑΜ.**

ΛΥΣΗ



Έστω ΒΔ και ΓΕ οι αποστάσεις των κορυφών Β και Δ από τη διάμεσο ΑΜ. Τότε:

$B\hat{M}\Delta = M\hat{E}\Gamma$, γιατί: **i)** ορθογώνια,

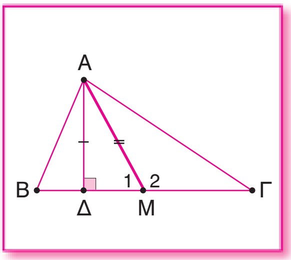
ii) ΒΜ = ΜΓ (Μ μέσο ΒΓ),

iii) $B\hat{M}\Delta = \Gamma\hat{M}E$ (κατακορυφήν),

άρα ΒΔ = ΓΕ, δηλαδή τα Β, Γ ισαπέχουν από την ΑΜ.

9 **Δίνονται τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΔ = Α′Δ′ ύψη και ΑΜ = Α′Μ′ διάμεσοι. Αν ΒΓ = Β′Γ′, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα.**

ΛΥΣΗ



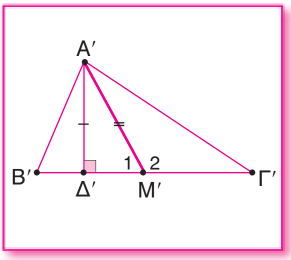
Έχουμε ότι:

$A\hat{M}\Delta = A'\hat{M}'\Delta'$, γιατί: **i)** ορθογώνια,

ii) ΑΜ = Α′Μ′ (υπόθεση),

iii) ΑΔ = Α′Δ′ (υπόθεση),

άρα: $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$.



Επίσης:

$A\hat{B}M = A'\hat{B}'M'$, γιατί: **i)** $\hat{M}_1 = \hat{M}'_1$,

ii) ΑΜ = Α′Μ′ (υπόθεση),

iii) $BM = B'M' \left(\dfrac{B\Gamma}{2} = \dfrac{B'\Gamma'}{2}\right)$,

άρα από Π – Γ – Π: ΑΒ = ΑΒ και $\hat{B} = \hat{B}'$.

Συνεπώς:

$A\hat{B}\Gamma = A'\hat{B}'\Gamma'$, γιατί: **i)** ΑΒ = Α′Β′ ($A\hat{B}M = A'\hat{B}'M'$),

ii) $\hat{B} = \hat{B}'$ ($A\hat{B}M = A'\hat{B}'M'$),

iii) ΒΓ = Β′Γ′ (υπόθεση).

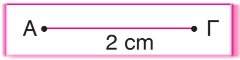
Β′ ΜΟΡΦΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ: ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

10 **Να κατασκευάσετε τα ακόλουθα τρίγωνα ΑΒΓ:**
α) ΑΓ = 2 cm, $\hat{A} = 71^\circ$, $\hat{\Gamma} = 49^\circ$, β) ΑΒ = 2 cm, ΑΓ = 2 cm, $\hat{A} = 56^\circ$.

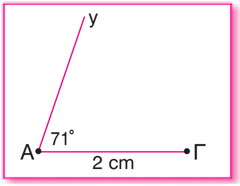
ΛΥΣΗ

α) Για την κατασκευή του τριγώνου αυτού ακολουθούμε τα εξής βήματα:

➢ Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ = 2 cm.

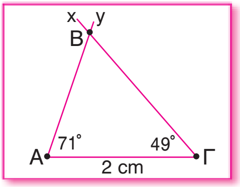


➢ Κατασκευάζουμε ημιευθεία Αy, έτσι ώστε $\Gamma\hat{A}y = 71^\circ$.



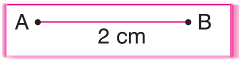
➢ Κατασκευάζουμε ημιευθεία Γx, έτσι ώστε $x\hat{\Gamma}A = 49^\circ$.

➢ Το σημείο τομής των ημιευθειών Αy και Γx είναι το σημείο Β, οπότε προκύπτει το ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ.

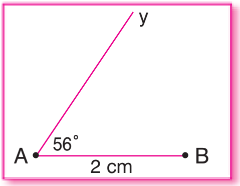


β) Για την κατασκευή του τριγώνου αυτού ακολουθούμε τα εξής βήματα:

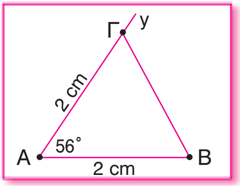
➢ Κατασκευάζουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 2 cm.



➢ Κατασκευάζουμε ημιευθεία Αy, έτσι ώστε $B\hat{A}y = 56^\circ$.



➢ Θεωρούμε σημείο Γ της ημιευθείας Αy, τέτοιο ώστε ΑΓ = 2 cm, οπότε προκύπτει το ζητούμενο τρίγωνο ΑΒΓ.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΝΕΟΥ ΤΥΠΟΥ

Να συμπληρώσετε τα κενά στις ακόλουθες φράσεις.

1. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ = ΕΖ και ΑΓ = ΔΕ. Για να είναι ίσα, αρκεί επιπλέον να έχουν .... ή ....

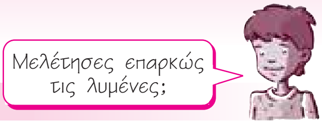
2. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν ΑΒ = ΕΖ και $\hat{A} = \hat{E}$. Για να είναι ίσα, αρκεί επιπλέον να έχουν .... ή ....

3. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{B} = \hat{Z}$ και $\hat{A} = \hat{E}$. Για να είναι ίσα, αρκεί επιπλέον να έχουν ....

4. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν $\hat{B} = \hat{Z} = 90^\circ$ και $\hat{A} = \hat{E}$. Για να είναι ίσα, αρκεί επιπλέον να έχουν .... ή .... ή ....

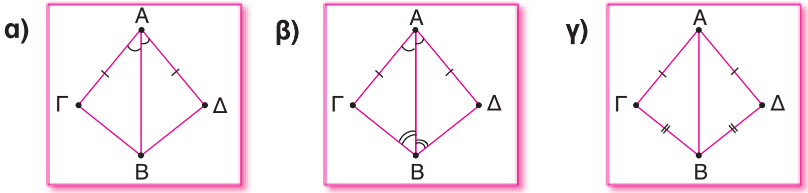
5. Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ με $\hat{A} = \hat{Z} = 90^\circ$ έχουν και ΑΒ = ΔΖ. Για να είναι ίσα, αρκεί επιπλέον να έχουν .... ή .... ή .... ή ....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

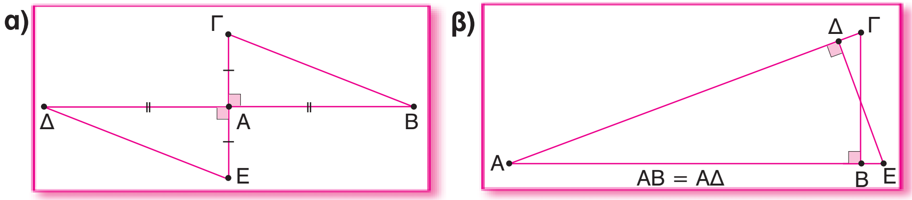


Α′ Ομάδα

1. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.



2. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΕΔ σε καθεμία από τις ακόλουθες περιπτώσεις.



3. **α)** Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

β) Να εξετάσετε τι είδους τρίγωνο ορίζουν τα μέσα των πλευρών ενός ισόπλευρου τριγώνου.

4. Δίνεται γωνία xOy, τα σημεία Α, Β στην Ox και τα σημεία Γ, Δ στην ημιευθεία Oy, έτσι ώστε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ. Αν Ε είναι το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΟΕ είναι διχοτόμος της γωνίας Ο.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και θεωρούμε σημεία Δ και Ε στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τα σημεία Β, Γ και από την πλευρά ΒΓ.

6. Δίνονται οι κύκλοι (Λ, ρ_1) και (Κ, ρ_2) που τέμνονται στα σημεία Α και Β.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΑΛ και ΚΒΛ είναι ίσα και ότι το ΛΚ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.

β) Να εξετάσετε πότε η χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος του ΛΚ.

7. **α)** Να αποδείξετε ότι, αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

β) Να αποδείξετε ότι, αν δύο χορδές κύκλου είναι ίσες, τότε είναι ίσα και τα αντίστοιχα τόξα.

8. Να αποδείξετε ότι η κάθετη που φέρνουμε από το κέντρο κύκλου (Ο, ρ) στη χορδή ΑΒ διέρχεται από το μέσο της χορδής και το μέσο του αντίστοιχου τόξου.

9. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: ΒΕ = ΕΔ.

10. Να αποδείξετε (χρησιμοποιώντας ίσα τρίγωνα) ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θα ισχύει: ΑΒ = ΓΔ, ΒΓ = ΑΔ, $\hat{Α} = \hat{Γ}$ και $\hat{Β} = \hat{Δ}$. Αν επιπλέον Ο είναι το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ, να αποδείξετε ότι: ΑΟ = ΟΓ και ΒΟ = ΟΔ.

11. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιές του είναι ίσες και ότι οι διαγώνιές του δημιουργούν τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα, ανά δύο ίσα μεταξύ τους.

12. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και Μ το μέσο του ΑΒ. Θεωρούμε σημεία Γ, Δ που ανήκουν στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η ΑΒ, έτσι ώστε ΑΓ = ΒΔ και ΜΔ = ΜΓ. Να αποδείξετε ότι: ΑΔ = ΒΓ.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο του ΒΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ προς το Α και παίρνουμε πάνω σε αυτές σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

14. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τα σημεία Κ, Λ, Μ στις πλευρές του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΑΚ = \frac{3}{4}ΑΒ$, $ΑΛ = \frac{3}{4}ΑΓ$ και ΒΜ = ΜΓ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισοσκελές.

15. Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΚΛΜ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε, Ζ στις πλευρές ΛΜ, ΚΛ, ΚΜ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΔΜ = \frac{2}{3}ΛΜ$, $ΚΕ = \frac{1}{3}ΚΛ$ και $ΖΜ = \frac{1}{3}ΚΜ$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

16. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ, ΓΔ > ΑΒ) φέρνουμε τα ύψη ΑΕ και και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι: **α)** $Α\hat{Δ}Ε = Β\hat{Γ}Ζ$, **β)** $ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

17. Από σημείο Ρ εκτός κύκλου (Ο, ρ) φέρνουμε τις εφαπτομένες ΡΑ και ΡΒ. Να αποδείξετε ότι: **α)** ΡΑ = ΡΒ, **β)** το ΟΡ διχοτομεί τη γωνία ΑΡΒ.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος ΑΔ, πάνω στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: $Α\hat{Γ}Ε = Α\hat{Ζ}Β$.

19. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. Να εξετάσετε τι συμβαίνει για τα αντίστοιχα ύψη.

20. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο άκρα κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $Ο\hat{Γ}Α = Ο\hat{Δ}Β$.

Β′ Ομάδα

21. Για τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ, για τα οποία έχουμε ότι $\hat{Α} = \hat{Δ}$, να αποδείξετε ότι: ΑΒ = ΑΓ = ΒΔ = ΔΓ. Στη συνέχεια να δικαιολογήσετε ότι η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ.

22. Σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′, όπου τα ΑΔ, Α′Δ′, ΒΕ, Β′Ε′, ΓΖ, Γ′Ζ′ είναι ύψη τους και έχουμε ότι $\hat{Α} = \hat{Α}' < 90°$, ΑΔ = Α′Δ′ και ΒΕ = Β′Ε′:

α) να αποδείξετε ότι: ΓΖ = Γ′Ζ′,

β) αν ΑΜ, Α′Μ′ είναι διάμεσοι, να αποδείξετε ότι: ΑΜ = Α′Μ′,

γ) αν ΒΝ, Β′Ν′ είναι διχοτόμοι, να αποδείξετε ότι: ΒΝ = Β′Ν′.

23. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ προς τις κορυφές Β, Γ, Α αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ = ΑΖ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

24. Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΑΓ αντίστοιχα. Αν ΑΖ είναι το ύψος του ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ και Ε ισαπέχουν από τη ΒΓ και η απόστασή τους είναι ίση με το ΑΖ.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Ο εσωτερικό σημείο του τριγώνου, έτσι ώστε ΒΟ = ΟΓ. Αν οι ευθείες ΒΟ, ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ, Μ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΟΛ = ΟΜ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

26. Να αποδείξετε ότι οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

27. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

28. Να κατασκευάσετε τα ακόλουθα τρίγωνα ΑΒΓ:

α) ΑΒ = 6 cm, $\hat{Α} = 36°$, $\hat{Β} = 63°$, **β)** ΑΒ = 4 cm, ΑΓ = 3 cm, $\hat{Α} = 47°$,

γ) ΑΒ = 8 cm, ΑΓ = 9 cm, ΓΒ = 7 cm, **δ)** ΑΒ = 3 cm, $\hat{Α} = 90°$, $\hat{Β} = 42°$,

ε) ΑΒ = 6 cm, ΑΓ = 5 cm, $\hat{Α} = 90°$, **στ)** ΑΒ = 3 cm, ΒΓ = 7 cm, $\hat{Α} = 90°$.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις συμπλήρωσης: **1.** ΒΓ = ΔΖ, $\hat{A} = \hat{E}$, **2.** $\hat{B} = \hat{Z}$, ΑΓ = ΔΕ, **3.** ΑΒ = ΕΖ, **4.** ΑΒ = ΕΖ, ΑΓ = ΔΕ, ΒΓ = ΔΖ, **5.** $\hat{B} = \hat{\Delta}$, $\hat{\Gamma} = \hat{E}$, ΑΓ = ΖΕ, ΒΓ = ΕΔ.

1. **α)** Π – Γ – Π, **β)** Γ – Π – Γ ή Π – Γ – Π, **γ)** Π – Π – Π.

2. Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.

3. **α)** Μία σύγκριση τριγώνων. **β)** Με δύο συγκρίσεις τριγώνων, ισόπλευρο.

4. $O\hat{A}\Delta = O\hat{B}\Gamma$, $\Gamma\hat{\Delta}E = O\hat{B}E$, $O\hat{E}\Delta = O\hat{B}E$.

5. **α)** ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ = ΑΕ, άρα ΔΒ = ΕΓ. **β)** $B\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{E}\Gamma$, άρα ΓΔ = ΕΒ. **γ)** Αν $\Delta Z \perp B\Gamma$, $EH \perp B\Gamma$, δείξτε ότι $B\hat{\Delta}Z = E\hat{\Gamma}H$, άρα ΖΔ = ΕΗ.

6. **α)** Δείτε ότι ΛΑ = ΛΒ, ΚΑ = ΚΒ, οπότε ΚΛ μεσοκάθετος του ΑΒ. **β)** Πρέπει $\rho_1 = \rho_2$.

7. Έστω (Ο, ρ) ο κύκλος και ΑΒ, ΓΔ οι χορδές. **α)** $O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta$, άρα ΑΒ = ΓΔ. **β)** $O\hat{A}B = O\hat{\Gamma}\Delta$, άρα $B\hat{O}A = \Gamma\hat{O}\Delta$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

8. Αν $O\Gamma \perp AB$, όπου Γ σημείο της ΑΒ και Δ σημείο του $\overset{\frown}{AB}$, δείξτε ότι $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}B$, οπότε ΓΑ = ΓΒ (δηλαδή Γ μέσο του ΑΒ) και $\Gamma\hat{O}A = \Gamma\hat{O}B$, άρα $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{B\Delta}$ (δηλαδή Δ μέσο του $\overset{\frown}{AB}$).

9. $A\hat{E}B = A\hat{E}\Delta$.

10. $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}\Delta$, $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$, $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$.

11. $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}\Delta$, οπότε ΑΓ = ΒΔ.

12. $A\hat{M}\Gamma = M\hat{B}\Delta$, άρα $\hat{A} = \hat{B}$ και $A\hat{B}\Delta = A\hat{B}\Gamma$, οπότε ΑΔ = ΒΓ.

13. $\Gamma\hat{M}E = B\hat{M}\Delta$, άρα ΜΕ = ΜΔ.

14. $K\hat{B}M = \Lambda\hat{M}\Gamma$, άρα ΚΜ = ΜΛ.

15. $K\hat{E}Z = \Lambda\hat{E}\Delta = \Delta\hat{Z}M$.

16. **β)** Αφού $A\hat{\Delta}E = B\hat{\Gamma}Z$, ισχύει ΔΕ = ΓΖ. Επίσης, ΓΔ = ΓΖ + ΖΕ + ΕΔ, οπότε ΓΔ = 2ΓΖ + ΑΒ, άρα $\Gamma Z = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$.

17. Δείξτε ότι $P\hat{A}O = P\hat{B}O$, οπότε ΡΑ = ΡΒ και $A\hat{P}O = B\hat{P}O$, επομένως το ΟΡ διχοτομεί τη γωνία ΑΡΒ.

18. $A\hat{\Gamma}E = A\hat{B}Z$, οπότε $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.

19. Έστω $A\hat{B}\Gamma$ (ΑΒ = ΑΓ) και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι. Δείξτε ότι $B\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{\Gamma}E$. Ομοίως, αν ΒΔ, ΓΕ ύψη.

20. $O\hat{\Delta}A = O\hat{B}\Gamma$, άρα $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.

21. Αφού $\hat{A} = \hat{\Delta}$, ισχύει $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε δείξτε ότι $A\hat{B}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$. Αφού ΑΒ = ΑΓ και ΔΒ = ΔΓ, το ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ.

22. $A\hat{B}E = A'\hat{B}'E'$, άρα ΑΒ = Α′Β′. $A\hat{B}\Delta = A'\hat{B}'\Delta'$, άρα $\hat{B} = \hat{B}'$. $A\hat{B}\Gamma = A'\hat{B}'\Gamma'$, άρα ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$. **α)** $\Gamma\hat{Z}A = \Gamma'\hat{Z}'A'$, άρα ΓΖ = ΖΓ, **β)** $A\hat{B}M = A'\hat{B}'M'$, **γ)** $A\hat{B}N = A'\hat{B}'N'$.

23. $A\hat{Z}\Delta = Z\hat{\Gamma}E = \Delta\hat{B}E$.

24. Αν $\Delta H \perp B\Gamma$, $E\Theta \perp B\Gamma$, τότε $H\hat{\Delta}B = B\hat{A}Z$, άρα ΔΗ = ΑΖ και $A\hat{Z}\Gamma = E\hat{\Gamma}\Theta$, οπότε ΕΘ = ΑΖ.

25. Το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ισοσκελές, άρα $O\hat{B}\Gamma = O\hat{\Gamma}B$. Επίσης, $B\hat{O}M = \Lambda\hat{O}\Gamma$, άρα $O\hat{B}M = O\hat{\Gamma}\Lambda$.

26. Για το τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις μεσοκαθέτους των πλευρών ΑΒ, ΒΓ που τέμνονται στο Μ, οπότε θα ισχύει ΜΑ = ΜΒ και ΜΒ = ΜΓ αντίστοιχα. Συνεπώς ΜΑ = ΜΓ, δηλαδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΓ, οπότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το Μ.

27. Για το τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ που τέμνονται στο Κ, οπότε το Κ ισαπέχει από τις πλευρές ΑΓ, ΑΒ και από τις πλευρές ΒΓ, ΒΑ αντίστοιχα. Συνεπώς το Κ ισαπέχει από τις ΓΑ, ΓΒ, δηλαδή το Κ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας Γ, οπότε οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ διέρχονται από το Κ.