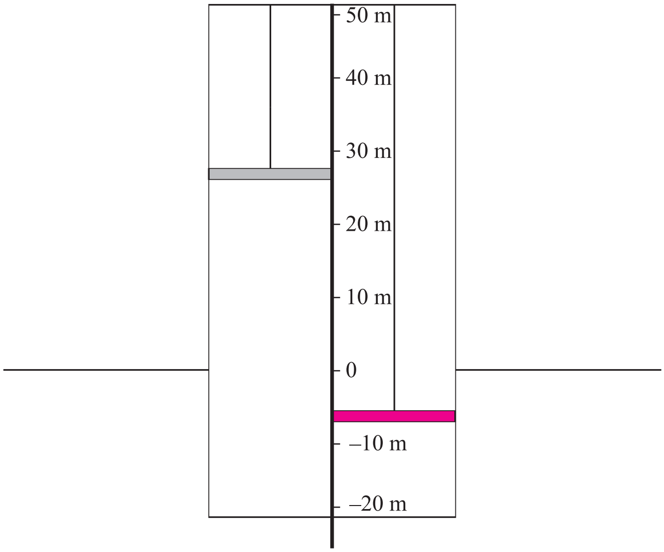
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΣΤΙΣ ΑΠΟΛΥΤΕΣ ΤΙΜΕΣ



Σε ένα υπό κατασκευή κτίριο, ύψους 50 μέτρων από την επιφάνεια του εδάφους, με υπόγεια βάθους 20 μέτρων από την επιφάνεια του εδάφους, οι εργάτες μετακινούνται με δύο πλατφόρμες επιβίβασης – αποβίβασης, μία γκρι και μία κόκκινη. Προκειμένου οι εργάτες να γνωρίζουν σε ποιο σημείο βρίσκονται, σε κάθε πλατφόρμα υπάρχει ηλεκτρονική ένδειξη για το ύψος σε μέτρα σε σχέση με την επιφάνεια του εδάφους, θετική όταν βρίσκονται πάνω από αυτή και αρνητική όταν βρίσκονται κάτω από αυτή.

1) Ποια είναι η απόσταση της πλατφόρμας από την επιφάνεια του εδάφους όταν η ένδειξη είναι 3 και ποια όταν είναι –3;
Απ.: ....
Με τον ίδιο τρόπο να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Ύψος πλατφόρμας	Απόσταση πλατφόρμας από την επιφάνεια του εδάφους
5	
–7,3	
–13	
15,7	

2) Η ένδειξη στην γκρι πλατφόρμα είναι –2 και στην κόκκινη 3. Ποια είναι η μεταξύ τους απόσταση;

Απ.: ....

Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Θέση γκρι πλατφόρμας	Θέση κόκκινης πλατφόρμας	Απόσταση κόκκινης από γκρι πλατφόρμα	Απόσταση γκρι από κόκκινη πλατφόρμα
3	5		
–2	8		
–3,5	–7,3		
0	8,7		
9,1	–4		

* Γενικά, αν θεωρήσουμε ότι η κόκκινη πλατφόρμα βρίσκεται σε ύψος α και η γκρι πλατφόρμα σε ύψος β, τότε η απόσταση της κόκκινης πλατφόρμας από την γκρι συμβολίζεται με $|\alpha-\beta|$, οπότε η απόσταση της γκρι πλατφόρμας από την κόκκινη είναι $|\beta-\alpha|$ και άρα προκύπτει ότι $|\alpha-\beta|$ ..... $|\beta-\alpha|$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό, όταν η γκρι πλατφόρμα βρίσκεται στο ισόγειο (ύψος 0) και η κόκκινη σε άγνωστη θέση, έστω x, η απόσταση ανάμεσα στις δύο πλατφόρμες συμβολίζεται: ....

Άρα, σε οποιοδήποτε ύψος x και αν βρίσκεται η κάθε πλατφόρμα, η απόστασή της από την επιφάνεια του εδάφους είναι: ....

3) Αν γνωρίζουμε ότι η γκρι πλατφόρμα βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια του εδάφους και το ύψος της είναι x μέτρα, ποια είναι η απόστασή της από αυτή;

Απ.: ....

4) Αν γνωρίζουμε ότι η κόκκινη πλατφόρμα βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια του εδάφους και το ύψος της είναι x μέτρα, ποια είναι η απόστασή της από αυτή;

Απ.: ....

(Επαληθεύστε τη σχέση που βρήκατε βάζοντας συγκεκριμένες τιμές στο x, θετικές για την γκρι και αρνητικές για την κόκκινη πλατφόρμα.)

!!! Συνδυάζοντας τις απαντήσεις στα ερωτήματα 3 και 4 καθώς και τον συμβολισμό της απόστασης, προκύπτει ότι $|x| = x$, όταν x ..... 0, και $|x| =$ ....., όταν $x < 0$.

5) Αν γνωρίζουμε ότι και οι δύο πλατφόρμες απέχουν 6 m από την επιφάνεια του εδάφους, ποια είναι τα πιθανά ύψη στα οποία μπορεί να βρίσκονται και ποιοι οι δυνατοί συνδυασμοί των υψών τους;

Απ.: ....

....

6) Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι τα δύο ύψη είναι είτε .... μεταξύ τους είτε ....

7) Γενικά, κάνοντας χρήση του συμβολισμού αν $|x| = |\alpha|$, τότε $x =$ ...... ή $x =$ ......

8) Αν γνωρίζουμε ότι η γκρι πλατφόρμα είναι σε ύψος 2 *m* και η κόκκινη σε άγνωστο ύψος, έστω x, να εκφραστεί η απόσταση της κόκκινης από την γκρι πλατφόρμα.
Απ.: ....

9) Να απαντηθεί το παραπάνω ερώτημα, αν το ύψος της γκρι πλατφόρμας είναι –12.
Απ.: ....

10) Αν η γκρι πλατφόρμα βρίσκεται σε ύψος 3 *m*, ποιες είναι οι πιθανές τιμές του x, αν γνωρίζουμε ότι η απόσταση της κόκκινης πλατφόρμας από την γκρι είναι 5 *m*;
Απ.: ....
....

11) Για ποιες τιμές του x οι αποστάσεις των ερωτημάτων 8 και 9 είναι ίσες μεταξύ τους;
Απ.: ....
....
....
(Υπόδειξη: Να λυθεί κάνοντας χρήση της σχέσης του ερωτήματος 7.)

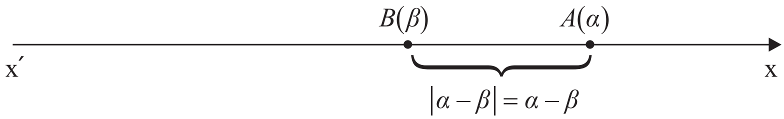
12) Αν γνωρίζουμε ότι η γκρι πλατφόρμα απέχει από την επιφάνεια του εδάφους απόσταση μικρότερη από 5 *m*, μεταξύ ποιων υψών κινείται;
Απ.: ....
Γενικεύοντας, ισχύει ότι, αν $|x| < \theta$, με $\theta > 0$, τότε $-\theta$ ..... $x <$ .....

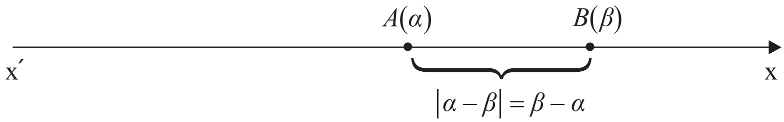
13) Αν γνωρίζουμε ότι η γκρι πλατφόρμα απέχει από την επιφάνεια του εδάφους απόσταση μεγαλύτερη από 7 *m*, ποια είναι τα επιτρεπτά ύψη κίνησης της πλατφόρμας;
Απ.: ....
Γενικεύοντας, ισχύει ότι, αν $|x| > \theta$, με $\theta > 0$, τότε x ..... $-\theta$ ή $x >$ .....

8 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

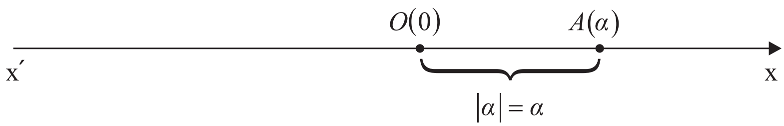
Αν οι αριθμοί α και β παριστάνονται από τα σημεία A και B του άξονα των πραγματικών αριθμών, **ορίζουμε ως απόλυτη τιμή της διαφοράς $\alpha - \beta$ το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB**, το οποίο λέγεται απόσταση των αριθμών α και β και συμβολίζεται με $d(\alpha, \beta)$:

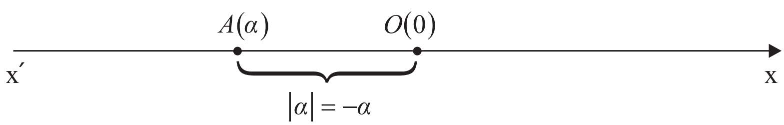
$|\alpha - \beta| = d(\alpha, \beta)$





Ειδικότερα, αν ως σημείο B επιλέξουμε την αρχή $O(0)$ του άξονα, έχουμε ότι $d(\alpha, O) = |\alpha - 0| = |\alpha|$.





Επομένως έχουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α, που παριστάνεται στον άξονα των πραγματικών από το σημείο A, ονομάζεται η απόσταση του σημείου A από το $O(0)$, συμβολίζεται με $|\alpha|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha > 0 \\ 0, & \text{αν } \alpha = 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Επειδή οι περιπτώσεις $|\alpha| = \alpha$, αν $\alpha > 0$, και $|\alpha| = 0$, αν $\alpha = 0$, μπορούν να συμπτυχθούν στη μορφή $|\alpha| = \alpha$, αν $\alpha \geq 0$, ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι:

$$|\alpha - \beta| = \begin{cases} \alpha - \beta, & \text{αν } \alpha > \beta \\ 0, & \text{αν } \alpha = \beta \\ \beta - \alpha, & \text{αν } \alpha < \beta \end{cases}$$

ή

$$|\alpha - \beta| = \begin{cases} \alpha - \beta, & \text{αν } \alpha \geq \beta \\ \beta - \alpha, & \text{αν } \alpha < \beta \end{cases}$$

Από τον ορισμό προκύπτουν οι εξής ιδιότητες για την απόλυτη τιμή του πραγματικού αριθμού α:

$|\alpha| \geq 0$ Η απόλυτη τιμή του α είναι μη αρνητικός αριθμός.

$\left.\begin{matrix} |\alpha| \geq \alpha \\ |\alpha| \geq -\alpha \end{matrix}\right\}$ Η απόλυτη τιμή του α είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση και του α και του αντίθετού του $(-\alpha)$.

$|\alpha| = |-\alpha|$ Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α ισούται με την απόλυτη τιμή του αντίθετού του.

ΣΧΟΛΙΟ

Η κατανόηση των παραπάνω ιδιοτήτων διευκολύνεται αν στις παραπάνω, αυστηρά μαθηματικές, διατυπώσεις αναλογιστούμε την απόλυτη τιμή σαν απόσταση του αριθμού α από το 0.

Ερωτήσεις εννοιολογικού περιεχομένου

1. Αν $|5| = x$, τότε ο x ισούται με:
Α. 5 **Β.** -5 **Γ.** 5 ή -5
Δ. δεν μπορούμε να ξέρουμε την τιμή του x, αφού ο x είναι άγνωστος

2. Αν $|5| = -x$, τότε ο x ισούται με:
Α. 5 **Β.** -5 **Γ.** 5 ή -5
Δ. δεν μπορούμε να ξέρουμε την τιμή του x, αφού ο x είναι άγνωστος

3. Αν $|x| = \alpha$, τότε για τον α μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι:
Α. θετικός αριθμός **Β.** ομόσημος του x **Γ.** μη αρνητικός αριθμός
Δ. οποιοσδήποτε αριθμός

4. Αν $|x| = \alpha$, τότε για τον x μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι:
Α. θετικός αριθμός **Β.** ομόσημος του α **Γ.** μη αρνητικός αριθμός
Δ. οποιοσδήποτε αριθμός

5. Αν $|x| = \alpha$, τότε για τον $|x|$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι:
Α. θετικός αριθμός **Β.** ομόσημος του α **Γ.** μη αρνητικός αριθμός
Δ. οποιοσδήποτε αριθμός

6. Αν $|x| = -\alpha$, τότε για τον x μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι:
Α. αρνητικός αριθμός **Β.** μικρότερος ή ίσος του μηδενός
Γ. οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός
Δ. θετικός, αφού είναι μέσα σε απόλυτο

7. Αν $|x| = -\alpha$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:
Α. ο α είναι αρνητικός αριθμός **Β.** $\alpha \geq 0$ **Γ.** $\alpha \leq 0$
Δ. ο α είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

8. Αν $|\alpha| = -\alpha$, τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:
Α. ο $|\alpha|$ είναι αρνητικός αριθμός **Β.** $\alpha \geq 0$ **Γ.** $\alpha \leq 0$
Δ. ο α είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός

9. Να επιλέξετε σε κάθε περίπτωση ποια από τις σχέσεις $|-x| = x$ ή $|-x| = -x$ θα χρησιμοποιήσετε και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα βρίσκοντας την $|-x|$:

x	3,1	$-2{,}3$	2	-5	1,9	$-4{,}4$
$\lvert -x \rvert$						

$\left(\textit{Θυμηθείτε ότι } |-x| = |x| \textit{ και } |x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \end{cases} . \right)$

10. Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$.

«Αν για έναν αριθμό α γνωρίζουμε ότι $|\alpha| + \alpha = 0$, τότε, σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής, $\alpha < 0$».

Είναι σωστός ο παραπάνω ισχυρισμός;

11. Έστω $\alpha < 0$. Τότε από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε $|\alpha| = -\alpha$.

Επίσης $|\alpha| > 0$, δηλαδή η απόλυτη τιμή του α είναι θετικός αριθμός.

$$|\alpha| \cdot (-\alpha) < 0$$

ΑΦΟΥ

$$(+) \cdot (-) = -$$

Άρα έχουμε:

$$|\alpha| \cdot (-\alpha) < 0 \xRightarrow{\cdot \frac{1}{|\alpha|}} \frac{|\alpha| \cdot (-\alpha)}{|\alpha|} < \frac{0}{|\alpha|} \Rightarrow -\alpha < 0 \xRightarrow{\cdot(-1)} \alpha > 0$$

Μπορείτε να εντοπίσετε πού είναι το λάθος στον παραπάνω συλλογισμό;

☑ Συνηθισμένα λάθη

- Όταν μας δίνεται η $|\alpha|$, συμπεραίνουμε ότι ο α είναι θετικός αριθμός.
  Λάθος. Ο α μπορεί να είναι είτε θετικός είτε αρνητικός αριθμός είτε και μηδέν. Αυτό που ξέρουμε είναι ότι η **απόλυτη τιμή** είναι **πάντα μη αρνητικός αριθμός**.
- $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
  Λάθος. Η ισότητα αυτή δεν ισχύει πάντα, π.χ. για $\alpha = 5$ και $\beta = -2$:
  $|5 - 2| = |3| = 3$, ενώ $|5| + |-2| = 5 + 2 = 7$.
- $|-\alpha| = \alpha$
  Λάθος. Ο α δεν είναι πάντα θετικός αριθμός, π.χ. για $\alpha = -3$ ισχύει
  $|-(-3)| = |3| = 3 \neq -3$.

Ιδιότητες απολύτων	
$\lvert\alpha\rvert=\begin{cases}\alpha, & \alpha\geq 0\\ -\alpha, & \alpha<0\end{cases}$	**Βασική Ιδιότητα**
$\lvert\alpha\rvert\geq 0$	**Βασική Ιδιότητα**
$\lvert\alpha\rvert\geq\alpha$ και $\lvert\alpha\rvert\geq-\alpha$	**Βασική Ιδιότητα**
$\lvert\alpha\rvert=\lvert-\alpha\rvert$	**Βασική Ιδιότητα**
$\lvert\alpha\rvert^2=\alpha^2$	**(I.1)**
$\lvert\alpha\cdot\beta\rvert=\lvert\alpha\rvert\cdot\lvert\beta\rvert$	**(I.2)**
$\left\lvert\dfrac{\alpha}{\beta}\right\rvert=\dfrac{\lvert\alpha\rvert}{\lvert\beta\rvert}$, για $\beta\neq 0$	**(I.3)**
$-\lvert\alpha\rvert\leq\alpha\leq\lvert\alpha\rvert$	**(I.4)**
$\big\lvert\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert\big\rvert\leq\lvert\alpha+\beta\rvert\leq\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$	**(I.5)**
Αν $\theta>0$, τότε $\lvert x\rvert=\theta\Leftrightarrow x=\theta$ ή $x=-\theta$	**(I.6)**
Αν $\alpha\in\mathbb{R}$, τότε $\lvert x\rvert=\lvert\alpha\rvert\Leftrightarrow x=\alpha$ ή $x=-\alpha$	**(I.7)**
Αν $\theta>0$, τότε $\lvert x\rvert<\theta\Leftrightarrow-\theta<x<\theta$	**(I.8)**
Αν $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$, τότε $\lvert x-x_0\rvert<\rho\Leftrightarrow$ $x_0-\rho<x<x_0+\rho$	
Αν $\theta>0$, τότε $\lvert x\rvert>\theta\Leftrightarrow x>\theta$ ή $x<-\theta$	**(I.9)**
Αν $x_0\in\mathbb{R}$ και $\rho>0$, τότε $\lvert x-x_0\rvert>\rho\Leftrightarrow$ $x<x_0-\rho$ ή $x>x_0+\rho$	

Μ.1 Απαλοιφή απολύτων με χρήση του ορισμού

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1

Η απαλοιφή απολύτων πραγματοποιείται κάνοντας χρήση του ορισμού της απόλυτης τιμής $\left(|\alpha| = \alpha,\ \text{αν}\ \alpha \geq 0,\ \text{ή}\ |\alpha| = -\alpha,\ \text{αν}\ \alpha < 0\right)$ και άρα **πρέπει να γνωρίζουμε τα πρόσημα των παραστάσεων που βρίσκονται μέσα στο απόλυτο**:

- **[Μ.1.1]** Αν η παράσταση δεν περιέχει μεταβλητές, βρίσκουμε το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα με τη βοήθεια της ισοδυναμίας: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$.
- **[Μ.1.2]** Αν η παράσταση περιέχει μεν μεταβλητές αλλά δε μας δίνεται κάποια συνθήκη γι' αυτές, τότε το πρόσημο των παραστάσεων είτε θα είναι προφανές (άθροισμα θετικών αριθμών, π.χ. $|x| + 4$, ή άθροισμα αρνητικών αριθμών, π.χ. $-x^2 - 5$), είτε θα προκύπτει μετά από στοιχειώδεις μετασχηματισμούς, π.χ. $-x^2 + 2x - 1 = -\left(x^2 - 2x + 1\right) = -(x-1)^2$, είτε θα βρίσκεται με τη βοήθεια της ιδιότητας $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$.
- **[Μ.1.3]** Αν η παράσταση περιέχει μεταβλητές αλλά μας δίνεται συνθήκη για τις μεταβλητές αυτές, τότε, κάνοντας χρήση της συνθήκης αυτής και της ισοδυναμίας $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$, βρίσκουμε τα πρόσημα των παραστάσεων μέσα στα απόλυτα.
- **[Μ.1.4]** Αν η παράσταση περιέχει μεταβλητές, χωρίς όμως να δίνεται συνθήκη γι' αυτές και το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στις απόλυτες τιμές δεν είναι προφανές και δεν μπορεί να προκύψει με μετασχηματισμούς, τότε κάνουμε χρήση του ορισμού ή του πίνακα προσήμων.

Εν συνεχεία, αν η παράσταση που βρίσκεται μέσα στο απόλυτο είναι θετική, απλά βγάζουμε το απόλυτο βάζοντας παρένθεση στη θέση του $\left(|\alpha| = \alpha\right)$, ενώ, αν η παράσταση είναι αρνητική, τότε βάζουμε πάλι παρένθεση στη θέση του απολύτου και είτε γράφουμε τον αντίθετο της παράστασης μέσα στην παρένθεση είτε αφήνουμε την παράσταση ως έχει και αλλάζουμε το πρόσημο που υπάρχει μπροστά από την παρένθεση $\left(|\alpha| = -\alpha,\ \text{αν}\ \alpha < 0\right)$. Η περίπτωση που η τιμή της παράστασης του απολύτου ισούται με 0 είναι τετριμμένη και προφανώς τη θέση της απόλυτης τιμής παίρνει το 0.

η Λυμένα θέματα

8.1 Να γραφούν οι παρακάτω παραστάσεις χωρίς τα απόλυτα:

α. $A=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|-\left|\pi-3\right|+\left|\pi-\sqrt{5}\right|+\left|1-\sqrt{2}\right|$

β. $B=\left|\left|x\right|+3\right|+2\left|x^2-4x+4\right|-\left|x-\left|x\right|\right|-\left|2x^2-12x+19\right|-5x$

Λύση

[Μ.1.1]

α. Βρίσκουμε το πρόσημο των ποσοτήτων που είναι μέσα σε απόλυτα:

- $5>2\Rightarrow\sqrt{5}>\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{5}-\sqrt{2}>0$, άρα $\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$
- $\pi>3\Rightarrow\pi-3>0$, άρα $\left|\pi-3\right|=\pi-3$
- $\pi>\sqrt{5}$, αφού $\pi>3=\sqrt{9}>\sqrt{5}\Rightarrow\pi-\sqrt{5}>0$, άρα $\left|\pi-\sqrt{5}\right|=\pi-\sqrt{5}$
- $1<2\Rightarrow\sqrt{1}<\sqrt{2}\Rightarrow1<\sqrt{2}$, άρα $\left|1-\sqrt{2}\right|=-\left(1-\sqrt{2}\right)=-1+\sqrt{2}=\sqrt{2}-1$

Άρα:

$A=\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|-\left|\pi-3\right|+\left|\pi-\sqrt{5}\right|+\left|1-\sqrt{2}\right|\Rightarrow$

$A=\sqrt{5}-\sqrt{2}-(\pi-3)+\left(\pi-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)\Rightarrow$

$A=\sqrt{5}-\sqrt{2}-\pi+3+\pi-\sqrt{5}+\sqrt{2}-1\Rightarrow$

$A=\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\pi-\pi+3-1\Rightarrow$

$A=2$

[Μ.1.2]

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

- $\left|x\right|\geq0\xRightarrow{+3}\left|x\right|+3\geq3\Rightarrow\left|x\right|+3>0$, άρα $\left|\left|x\right|+3\right|=\left|x\right|+3$
- $x^2-4x+4=x^2-2\cdot x\cdot2+2^2=(x-2)^2\geq0$, άρα $\left|x^2-4x+4\right|=x^2-4x+4$
- $-\left|x\right|\leq\boldsymbol{x}\leq\left|\boldsymbol{x}\right|\Rightarrow x\leq\left|x\right|\Rightarrow x-\left|x\right|\leq0$, άρα $\left|x-\left|x\right|\right|=-x+\left|x\right|$
- $2x^2-12x+19=2x^2-12x+18+1=2\left(x^2-6x+9\right)+1=$
  $=2\left(x^2-2\cdot x\cdot3+3^2\right)+1=2(x-3)^2+1>0$,
  άρα $\left|2x^2-12x+9\right|=2(x-3)^2+1$

Άρα:

$B = \left||x|+3\right| + 2\left|x^2-4x+4\right| - \left|x-|x|\right| - \left|2x^2-12x+19\right| - 5x \Rightarrow$

$B = |x|+3+2(x-2)^2 - (-x+|x|) - 2(x-3)^2 - 1 - 5x \Rightarrow$

$B = |x|+3+2(x-2)^2 + x - |x| - 2(x-3)^2 - 1 - 5x \Rightarrow$

$B = |x|-|x|+2(x-2)^2 - 2(x-3)^2 + 3 + x - 1 - 5x \Rightarrow$

$B = 2\left[(x-2)^2-(x-3)^2\right] - 4x + 2 \Rightarrow$

$B = 2\left[(x-2)-(x-3)\right]\left[(x-2)+(x-3)\right] - 4x + 2 \Rightarrow$

$B = 2(x-2-x+3)(x-2+x-3) - 4x + 2 \Rightarrow$

$B = 2(2x-5) - 4x + 2 \Rightarrow$

$B = 4x - 10 - 4x + 2 \Rightarrow$

$B = -8$

ΣΧΟΛΙΟ

- Αν $A = 0$, τότε $|A| = |0| = 0$.
- Αν $A < 0$, τότε $|A| = -A$.

Η τελευταία ισότητα επαληθεύεται και για $A = 0$. Άρα, **για πρακτικούς λόγους**, μπορούμε να γράψουμε **κατευθείαν**:

$$A \leq 0 \Leftrightarrow |A| = -A$$

8.2 Αν $-1 < \alpha < 2$, να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\boldsymbol{\Gamma = |\alpha+1| + |\alpha-2| + |\alpha-3| + \alpha}$$

Λύση

[M.1.3]

- $-1 < \alpha < 2 \xRightarrow{+1} 0 < \alpha + 1 < 3 \Rightarrow \alpha + 1 > 0$, άρα $|\alpha+1| = \alpha + 1$
- $-1 < \alpha < 2 \xRightarrow{+(-2)} -3 < \alpha - 2 < 0 \Rightarrow \alpha - 2 < 0$, άρα $|\alpha-2| = -(\alpha-2) = -\alpha + 2$
- $-1 < \alpha < 2 \xRightarrow{+(-3)} -4 < \alpha - 3 < -1 \Rightarrow \alpha - 3 < 0$, άρα $|\alpha-3| = -\alpha + 3$

Άρα:

$\Gamma = |\alpha+1| + |\alpha-2| + |\alpha-3| + \alpha \Rightarrow$

$\Gamma = \alpha + 1 + (-\alpha+2) + (-\alpha+3) + \alpha \Rightarrow$

$\Gamma = \alpha + 1 - \alpha + 2 - \alpha + 3 + \alpha \Rightarrow$

$\Gamma = 6$

8.3 Να γραφεί η παρακάτω παράσταση χωρίς το απόλυτο:

$$K = |x-1| + 2$$

Λύση

[M.1.4]

Ισχύει $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ (και $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$).

Δηλαδή:

- αν $x \geq 1$, είναι $x-1 \geq 0$, άρα $|x-1| = x-1$
  και $K = x-1+2 \Rightarrow K = x+1$.
- αν $x<1$, είναι $x-1<0$, άρα $|x-1| = -(x-1) \Rightarrow |x-1| = -x+1$
  και $K = -x+1+2 \Rightarrow K = -x+3$.

Συνοπτικά γράφουμε:

$$K = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x+3, & \text{αν } x<1 \end{cases}$$

8.4 Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\Lambda = |x+3| + |x-2|$$

Λύση

[M.1.4]

Βρίσκουμε το πρόσημο των παραστάσεων μέσα στο απόλυτο με τη βοήθεια του πίνακα προσήμων:

$$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$$

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

x	$-\infty$	-3		2		$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	

Αυτό σημαίνει ότι:

- Αν $x \in (-\infty, -3)$, τότε $\begin{cases} x+3<0, \text{άρα } |x+3| = -x-3 \\ x-2<0, \text{άρα } |x-2| = -x+2 \end{cases}$.
  Άρα $\Lambda = -x-3-x+2 = -2x-1$.
- Αν $x \in [-3, 2)$, τότε $\begin{cases} x+3 \geq 0, \text{άρα } |x+3| = x+3 \\ x-2<0, \text{άρα } |x-2| = -x+2 \end{cases}$.
  Άρα $\Lambda = x+3-x+2 = 5$.

- Αν $x \in [2, +\infty)$, τότε $\begin{cases} x+3>0, \text{ άρα } |x+3| = x+3 \\ x-2 \geq 0, \text{ άρα } |x-2| = x-2 \end{cases}$.

  Άρα $\Lambda = x+3+x-2 = 2x+1$.

Συνοπτικά γράφουμε:

$$\Lambda = \begin{cases} -2x-1, & \text{αν } x \in (-\infty, -3) \\ 5, & \text{αν } x \in [-3, 2) \\ 2x+1, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

Παρατήρηση

Στο παραπάνω λυμένο θέμα, τα άκρα των διαστημάτων επιλέχθηκαν έτσι ώστε να είμαστε συνεπείς με τον ορισμό $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha < 0 \end{cases}$. Σε όποιο διάστημα όμως και να επιλέξουμε να συμπεριλάβουμε την κάθε ρίζα, το αποτελέσμα δε θα αλλάξει.

Προτεινόμενες Ασκήσεις για λύση

8.5 Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων:

α. $A = |2-\pi| + |\pi-3|$

β. $B = |1-\pi| - |\pi-2|$

γ. $\Gamma = |4-\pi| + |\pi-4|$

δ. $\Delta = 2|3-\pi| + |\pi-3|$

ε. $E = |9-\pi^2| + |1+\pi| + |4-\pi|$

στ. $Z = |2\pi-8| - 1 + |\pi^2-4|$

ζ. $H = |2\pi^2-18| + |\pi-2| - |12+4\pi|$

η. $\Theta = |3\pi^2-27| + |\sqrt{2}-2| + \sqrt{2}$

θ. $I = |1-\sqrt{3}| + |\pi-4| + |\sqrt{3}-\pi|$

8.6 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $A = |x^2+1| + |-3x^2-2|$

β. $B = |x^4+x^2| + |-1-x^4|$

γ. $\Gamma = |x^2-6x+9| + |x^2+2x+1|$

δ. $\Delta = |x^2+6|x|+9| + |x^2+7|x|+2|$

ε. $E = |x^2-2|x|+1| - |x^2+4|x|+4|$

στ. $Z = |x^2+4x+4| + |x^2-2x+1| - |2x^2+4|$

ζ. $H = |2|x|+1| - |2|x|+1|$

η. $\Theta = 3||x|+2| - |2|x|+5| - |x|$

θ. $I = ||x|+2| - 3 - |x|$

8.7 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $A = ||x|+\pi| + |\pi-4| - ||x|-3|$

β. $B = ||x|+2| + \left|x^2+x+\dfrac{1}{4}\right| -$
$- |x^2+|x|| + ||x|+\pi| + |\pi-4|$

γ. $\Gamma = 2||x|+3| - ||x|+1| - |x|$

δ. $\Delta = ||x^2-4x+4| - |x^2-2x+1| - 3| - 2|x|$