35 Γραφική παράσταση συνάρτησης

Θεωρία

1. Βασικοί ορισμοί

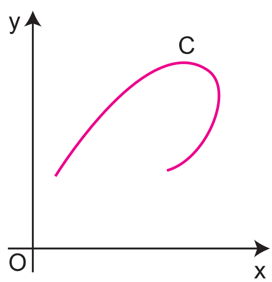
Έστω f μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής.

- **Γραφική παράσταση** της f λέγεται το σύνολο των σημείων M(x, y) ενός καρτεσιανού επιπέδου για τα οποία ισχύει $y = f(x)$.
- Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f συμβολίζεται με $\mathbf{C_f}$. Είναι δηλαδή $C_f = \{M(x, y) \,/\, y = f(x)\}$.
- Η εξίσωση $y = f(x)$ [με δύο μεταβλητές x και y], η οποία επαληθεύεται από τις συντεταγμένες κάθε σημείου της C_f και δεν επαληθεύεται από κανένα άλλο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης** της f.

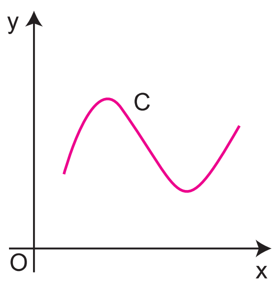
2. Είναι κάθε καμπύλη (σ' ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων xOy) γραφική παράσταση συνάρτησης;

Να βρείτε αν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y) η καμπύλη που δίνεται στο παρακάτω σχήμα.

i)

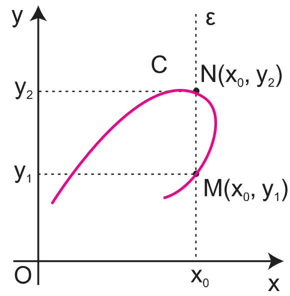


ii)



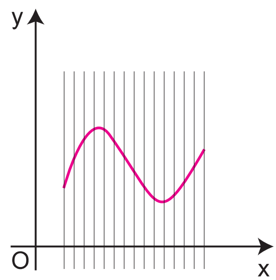
Λύση

i) Παρατηρούμε ότι υπάρχει κατακόρυφη ($//y'y$) ευθεία ε που τέμνει την C σε δύο διαφορετικά σημεία, τα Μ και Ν. Θα αποδείξουμε ότι η C δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, εργαζόμενοι με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση f τέτοια, ώστε $C_f = C$ [δηλαδή που να έχει γραφική παράσταση την C].



Αν x_0 είναι η κοινή τετμημένη των Μ, Ν και $ψ_1$, $ψ_2$ αντίστοιχα (με $ψ_1 \neq ψ_2$) οι τεταγμένες τους, τότε $f(x_0) = y_1$ [διότι $M(x_0, y_1) \in C_f$] και $f(x_0) = y_2$ [διότι $N(x_0, y_2) \in C_f$]. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί από τον ορισμό της συνάρτησης δεν μπορεί το στοιχείο x_0 του πεδίου ορισμού της f να αντιστοιχίζεται με την f στα δύο διαφορετικά στοιχεία y_1, y_2.

ii) Παρατηρούμε ότι κάθε κατακόρυφη ($//y'y$) ευθεία που τέμνει την C την τέμνει σε ένα μόνο σημείο (δηλαδή δεν υπάρχουν σημεία της C με την ίδια τετμημένη). Έστω Α το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ που σε κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζει την τεταγμένη του (μοναδικού, όπως είδαμε) σημείου της C το οποίο έχει τετμημένη x.



Ορίζεται έτσι μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η C. Άρα η C είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

Μια καμπύλη C σ' ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων xOy είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (με ανεξάρτητη μεταβλητή x και εξαρτημένη μεταβλητή y) αν και μόνο αν κάθε κατακόρυφη ($//y'y$) ευθεία τέμνει την C σε ένα το πολύ σημείο [ή, αλλιώς, αν δεν υπάρχουν δύο διαφορετικά σημεία της C με την ίδια τετμημένη].

[Επομένως η C δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης αν και μόνο αν υπάρχει κατακόρυφη ευθεία η οποία έχει με την C δύο (ή περισσότερα) κοινά σημεία, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχουν στην C δύο (ή περισσότερα) σημεία με την ίδια τετμημένη.]

Λυμένες ασκήσεις

Πότε ένα σημείο $N(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $[N(x_0, y_0) \in C_f \Leftrightarrow f(x_0) = y_0]$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{x-3}$. Να εξετάσετε αν τα σημεία $N_1(12, 5)$, $N_2(4, 10)$ και $N_3(2, α)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση της f.

Λύση

Ένα σημείο $N(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα $f(x_0) = y_0$.

- Έχουμε:

$$f(12) = 2 + \sqrt{12-3} = 5 = y_{N_1}$$

Επομένως το N_1 ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

- Έχουμε:

$$f(4) = 2 + \sqrt{4-3} = 3 \neq 10 = y_{N_2}$$

Επομένως το N_2 δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

- Η τετμημένη $x = 2$ του σημείου N_3 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού $A = [3, +\infty)$ της f, επομένως το N_3 δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

4. Να βρείτε για ποια τιμή του α το σημείο $N(2, -3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = αx^3 + 5$.

Λύση

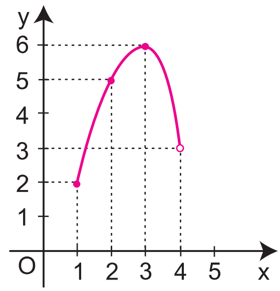
Το σημείο $N(2, -3)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f μόνο αν ισχύει η ισότητα $f(2) = -3$, δηλαδή $α \cdot 2^3 + 5 = -3$, δηλαδή $8α = -8$, δηλαδή $α = -1$.

Εύρεση τιμής $f(x_0)$ και πεδίο ορισμού συνάρτησης f από την C_f

5. **Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε:**

i) τις τιμές f(2) και f(6), εφόσον υπάρχουν.

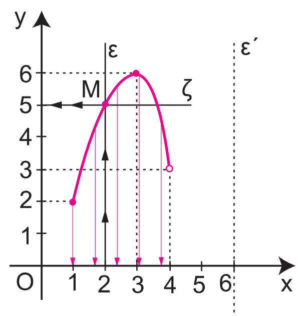
ii) το πεδίο ορισμού της f.



Λύση

i) Γενικά, το $f(x_0)$ είναι η τεταγμένη εκείνου του σημείου της C_f το οποίο έχει τετμημένη x_0 (εφόσον υπάρχει τέτοιο σημείο).

- Από τη θέση x = 2 του άξονα x′x [δηλαδή από το σημείο (2, 0)] φέρνουμε ευθεία ε // y′y η οποία τέμνει την C_f στο σημείο M. Από το M φέρνουμε ευθεία ζ // x′x η οποία τέμνει τον άξονα y′y στη θέση 5 [δηλαδή στο σημείο (0, 5)]. Άρα f(2) = 5.



- Από τη θέση x = 6 του άξονα x′x φέρνουμε ευθεία ε′ // y′y η οποία, όπως παρατηρούμε, δεν τέμνει την C_f. Άρα δεν ορίζεται τιμή της f για x = 6.

ii) Το πεδίο ορισμού A μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της C_f. Έτσι, για να βρούμε το A, θεωρούμε την προβολή της C_f (δηλαδή κάθε σημείου της C_f) στον άξονα x′x. Το σύνολο των τετμημένων όλων των σημείων που προκύπτουν είναι το πεδίο ορισμού της f.

Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 1 \le x < 4\} = [1, 4)$.

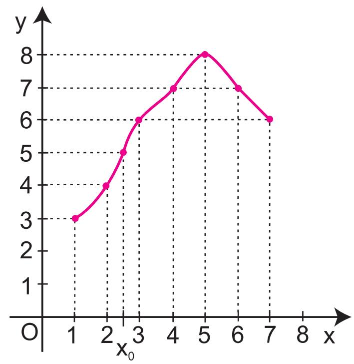
Πώς εξετάζουμε γραφικά αν ένας αριθμός κ είναι τιμή μιας συνάρτησης f – Γραφική επίλυση εξίσωσης της μορφής f(x) = κ

6. **Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο επόμενο σχήμα.**

i) Να εξετάσετε αν είναι τιμή της f ο αριθμός:

α) 4 β) 5 γ) 6 δ) 2

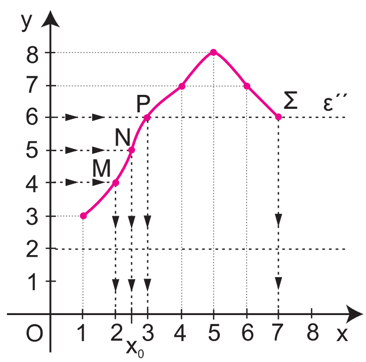
ii) Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 6 [δηλαδή να βρείτε όλα τα x για τα οποία ισχύει f(x) = 6].



Λύση

i) Ο αριθμός y_0 είναι τιμή της f αν υπάρχει $x_0 \in D_f$ με $f(x_0) = y_0$, δηλαδή αν υπάρχει σημείο της C_f με τεταγμένη y_0.

α) Από τη θέση 4 του άξονα y΄y [δηλαδή από το σημείο (0, 4)] φέρνουμε ευθεία ε // x΄x η οποία, όπως παρατηρούμε στο σχήμα, τέμνει την C_f στο σημείο Μ. Άρα το 4 είναι τιμή της f [συγκεκριμένα ισχύει f(2) = 4].



β) Από τη θέση 5 του άξονα y΄y φέρνουμε ευθεία ε΄ // x΄x η οποία τέμνει την C_f στο σημείο Ν. Άρα το 5 είναι τιμή της f [αν x_0 είναι η τετμημένη του Ν, τότε $f(x_0) = 5$].

γ) Από τη θέση 6 του άξονα y΄y φέρνουμε ευθεία ε΄΄ // x΄x η οποία τέμνει την C_f στα σημεία Ρ και Σ. Άρα το 6 είναι τιμή της f [και ισχύει f(3) = f(7) = 6].

δ) Από τη θέση 2 του άξονα y΄y φέρνουμε ευθεία // x΄x η οποία, όπως βλέπουμε στο σχήμα, δεν τέμνει την C_f. Άρα το 2 δεν είναι τιμή της f.

ii) Οι λύσεις της εξίσωσης f(x) = κ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f τα οποία έχουν τεταγμένη ίση με κ.

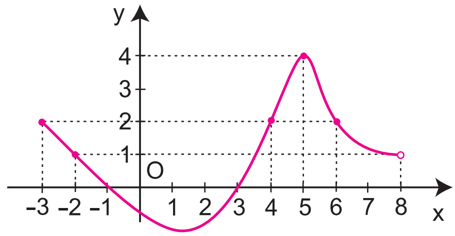
Αν φέρουμε από τη θέση 6 του άξονα y΄y ευθεία // x΄x, παρατηρούμε ότι αυτή τέμνει την C_f στα σημεία Ρ και Σ (και μόνο σ' αυτά). Οι τετμημένες των Ρ και Σ είναι 3 και 7 αντίστοιχα. Έτσι, η εξίσωση f(x) = 6 έχει λύσεις τους αριθμούς 3 και 7 (και μόνο αυτούς).

Γραφική επίλυση ανίσωσης της μορφής $f(x) \gtrless κ$

7. **Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να λύσετε τις ανισώσεις:**

i) $f(x) > 0$ **ii)** $f(x) > 2$

iii) $f(x) \geq 2$ **iv)** $f(x) < 0$



Λύση

Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > κ$ είναι οι τετμημένες των σημείων της C_f τα οποία έχουν τεταγμένη μεγαλύτερη από κ. Έτσι, για να λύσουμε γραφικά την ανίσωση $f(x) > κ$:

- Από τη θέση κ του άξονα $y'y$ [δηλαδή από το σημείο $(0, κ)$] φέρνουμε ευθεία $ε \,//\, x'x$.
- Θεωρούμε τα τμήματα της C_f που βρίσκονται πάνω από την ε.
- Προβάλλουμε αυτά τα τμήματα (δηλαδή κάθε σημείο τους) στον άξονα $x'x$.
- Το σύνολο των τετμημένων των σημείων που προκύπτουν είναι το ζητούμενο σύνολο λύσεων της ανίσωσης $f(x) > κ$.

Ανάλογα ισχύουν για ανίσωση της μορφής $f(x) < κ$.

Ακολουθώντας την παραπάνω μεθοδολογία, βρίσκουμε ότι:

i) η ανίσωση $f(x) > 0$ αληθεύει αν και μόνο αν:
$-3 \leq x < -1$ ή $3 < x < 8$ [$f(x) > 0 \Leftrightarrow (-3 \leq x < -1$ ή $3 < x < 8)$]

ii) $f(x) > 2 \Leftrightarrow 4 < x < 6$

iii) $f(x) \geq 2 \Leftrightarrow x = -3$ ή $4 < x < 6$

iv) $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

Γραφική επίλυση εξίσωσης της μορφής f(x) = g(x) και ανίσωσης της μορφής $f(x) \gtrless g(x)$

8. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g. Να λύσετε:

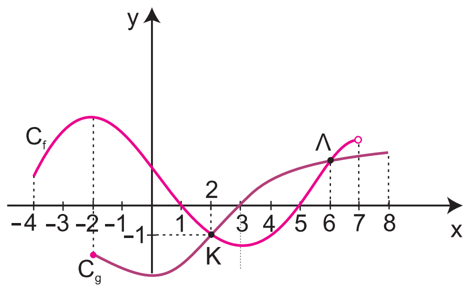
i) την εξίσωση f(x) = g(x).

ii) την ανίσωση f(x) > g(x).

iii) τη «διπλή ανίσωση»:

α) f(x) > 0 > g(x)

β) f(x) < 0 < g(x)



Λύση

i) Οι λύσεις της εξίσωσης f(x) = g(x) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g.

- Τα κοινά σημεία των C_f, C_g είναι τα Κ, Λ.
- Οι τετμημένες των Κ και Λ είναι 2 και 6 αντίστοιχα.
- Άρα οι λύσεις της εξίσωσης f(x) = g(x) είναι οι αριθμοί 2 και 6.

ii) Βρίσκουμε κάθε σημείο M(x, f(x)) της C_f που βρίσκεται πάνω από το σημείο N(x, g(x)) της C_g που έχει την ίδια τετμημένη (δηλαδή βρίσκεται στην ίδια κατακόρυφη ευθεία) με το N. Οι τετμημένες όλων αυτών των σημείων M είναι οι λύσεις της ανίσωσης f(x) > g(x).

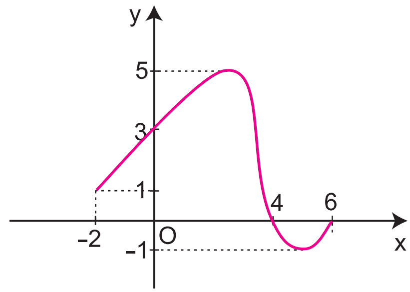
Έχουμε: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow -2 \leq x < 2$ ή $6 < x < 7$.

iii) α) $f(x) > 0 > g(x) \Leftrightarrow -2 \leq x < 1$.

β) $f(x) < 0 < g(x) \Leftrightarrow 3 < x < 5$.

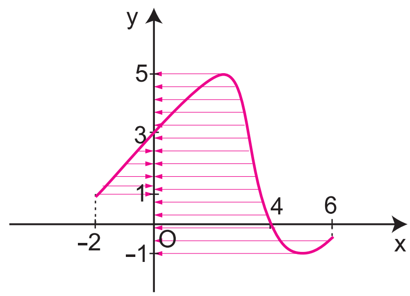
Εύρεση συνόλου τιμών συνάρτησης f από την C_f

9. Έστω f η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.



Λύση

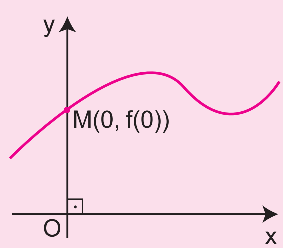
Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της C_f.
Έτσι, για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f, φέρνουμε την προβολή της C_f (δηλαδή κάθε σημείου της C_f) στον άξονα y′y. Το σύνολο των τεταγμένων των σημείων που προκύπτουν είναι το σύνολο τιμών της f.



Το ζητούμενο σύνολο τιμών είναι το $[-1, 5]$.

Κοινά σημεία γραφικής παράστασης συνάρτησης: i) με τον άξονα y΄y ii) με τον άξονα x΄x

Αν C είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού A και M(x, y) ένα σημείο του επιπέδου, τότε:



- (Το M είναι κοινό σημείο της C και του άξονα y′y) ⇔

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M \in C \\ M \in y'y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(0) \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow M(0, f(0))$ (εφόσον $0 \in A$)

Συμπεραίνουμε ότι:

→ Αν $0 \in A$, τότε η C έχει με τον άξονα $y'y$ ένα μόνο κοινό σημείο, το $M(0, f(0))$.

→ Αν $0 \notin A$, τότε η C δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

Έτσι η C έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$ [όπως και με οποιαδήποτε κατακόρυφη (// $y'y$) ευθεία].

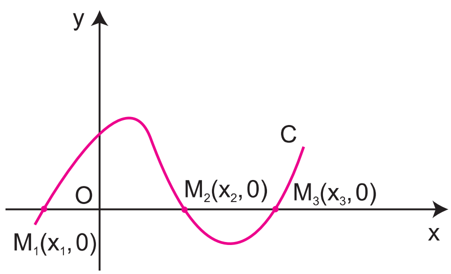
Για να βρούμε το κοινό σημείο της C με τον άξονα $y'y$, βάζουμε στον τύπο της f όπου x το 0 (εφόσον $0 \in A$) και βρίσκουμε το $f(0)$. Το ζητούμενο κοινό σημείο είναι το $M(0, f(0))$.

- (Το M είναι κοινό σημείο της C και του άξονα $x'x$) $\Leftrightarrow \begin{cases} M \in C \\ M \in x'x \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M(x, 0) \text{ με } f(x) = 0$$

Έτσι το $M(x, y)$ είναι κοινό σημείο της C και του $x'x$ αν και μόνο αν $y = 0$ και το x είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C με τον άξονα $x'x$, **λύνουμε** πρώτα **την εξίσωση $f(x) = 0$**. Τα ζητούμενα κοινά σημεία είναι τα σημεία της μορφής $M(x, 0)$, όπου x ρίζα της (1) (δεχόμαστε μόνο τιμές του x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f).



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$ ή $x = x_3$

10. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = -3(x + 1)(x - 2)$:
i) με τον άξονα $y'y$ ii) με τον άξονα $x'x$

Λύση

Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R}$.

Σχόλιο για το i)	**Σχόλιο για το ii)**
Βάζουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου x το 0, δηλαδή βρίσκουμε το $f(0)$ (αφού $0 \in A = \mathbb{R}$). [Ο αριθμός που θα βρούμε είναι η τεταγμένη του ζητούμενου σημείου.]	Βάζουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου y το 0 και λύνουμε ως προς x. [Οι αριθμοί που θα βρούμε είναι οι τετμημένες των ζητούμενων σημείων.]

i) • Έχουμε:

$$f(0) = -3(0+1)(0-2) = = -3 \cdot 1 \cdot (-2) = 6$$

• Το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0, 6)$.

ii) • Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -3(x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+1 = 0 \text{ ή } x-2 = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x = -1 \text{ ή } x = 2)$$

• Τα ζητούμενα σημεία είναι τα $M_1(-1, 0)$ και $M_2(2, 0)$.

11. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{x-2}$ με τους άξονες.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα το πεδίο ορισμού της f. Η f ορίζεται στο x μόνο αν $x - 2 \geq 0$, δηλαδή μόνο αν $x \geq 2$. Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $A = [2, +\infty)$.

Με τον άξονα x΄x

Βάζουμε στην εξίσωση $y = f(x)$ όπου y το 0 και λύνουμε ως προς x. Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9)\sqrt{x-2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 9 = 0 \text{ ή } \sqrt{x-2} = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 = 9 \text{ ή } x - 2 = 0) \Leftrightarrow (x = -3 \text{ ή } x = 3 \text{ ή } x = 2).$$

Όμως, επειδή το x ανήκει στο πεδίο ορισμού $A = [2, +\infty)$, δεκτές είναι μόνο οι τιμές $x = 2$ και $x = 3$. Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $K(2, 0)$ και $\Lambda(3, 0)$.

Με τον άξονα y΄y

Επειδή ο αριθμός $x = 0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f, συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τον άξονα y΄y.

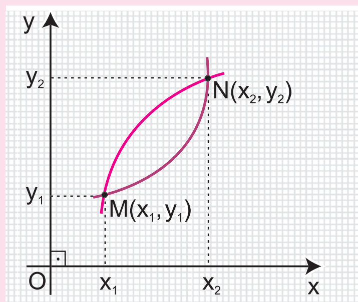
Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Έστω f και g δύο συναρτήσεις, C_f και C_g οι γραφικές τους παραστάσεις αντίστοιχα και έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.
Για ένα σημείο M(x, y) έχουμε:

$$(\text{M κοινό σημείο των } C_f, C_g) \Leftrightarrow \begin{cases} M \in C_f \\ M \in C_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = f(x) \end{cases}$$

Έτσι, **για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f, C_g**, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους, δηλαδή το σύστημα: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$

Στην πράξη συνήθως **λύνουμε πρώτα την εξίσωση f(x) = g(x). Οι λύσεις (ρίζες) αυτής της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των ζητούμενων κοινών σημείων**. Για κάθε λύση x που θα βρούμε, βρίσκουμε την τεταγμένη y του αντίστοιχου σημείου βάζοντας το x στον τύπο της f ή της g (το ίδιο είναι), δηλαδή από τη σχέση y = f(x) (ή y = g(x)).



$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_1$ ή $x = x_2$

$y_1 = f(x_1) = g(x_1)$

$y_2 = f(x_2) = g(x_2)$

12. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 2x^2 - x + 4$ και $g(x) = x^2 + 2x + 4$.

Λύση

Λύνουμε την εξίσωση f(x) = g(x). Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής αποτελούν τις τετμημένες των ζητούμενων κοινών σημείων. Έχουμε:

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = x^2 + 2x + 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - x^2 - x - 2x = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow (x = 0$ ή $x - 3 = 0) \Leftrightarrow$

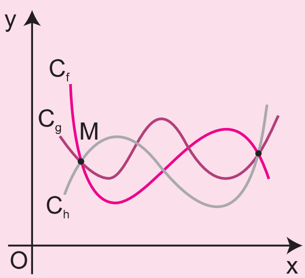
$\Leftrightarrow (x = 0$ ή $x = 3)$.

Άρα έχουμε δύο κοινά σημεία:

- Το ένα, έστω Λ, έχει τετμημένη $x = 0$. Για να βρούμε και την τεταγμένη του Λ, βάζουμε την τετμημένη του $x = 0$ στον τύπο της f ή της g (το ίδιο είναι). Προκύπτει $y = f(0) = g(0) = 4$, άρα το Λ έχει συντεταγμένες (0, 4).
- Το άλλο, έστω Ν, έχει τετμημένη $x = 3$. Για να βρούμε και την τεταγμένη του Ν, βάζουμε την τετμημένη του $x = 3$ στον τύπο της f ή της g. Προκύπτει $y = f(3) = g(3) = 19$, άρα το Ν είναι το σημείο Ν(3, 19).

Κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων τριών συναρτήσεων

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g, C_h τριών συναρτήσεων f, g, h αντίστοιχα, πρέπει να λύσουμε



το σύστημα: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ y = h(x) \end{cases}$

Για να γίνει αυτό, συνήθως:

- Λύνουμε πρώτα την ευκολότερη από τις εξισώσεις $f(x) = g(x)$, $g(x) = h(x)$, $h(x) = f(x)$, έστω, π.χ., την $g(x) = h(x)$. Βρίσκουμε έτσι τα κοινά σημεία των C_g, C_h.
- Για κάθε σημείο $M(x_0, y_0)$ από αυτά που θα βρούμε, εξετάζουμε αν η C_f διέρχεται από το Μ (δηλαδή αν $f(x_0) = y_0$). Αν ναι, τότε αυτό είναι κοινό σημείο των C_f, C_g, C_h.

13. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 3x - 2$ και $h(x) = 4x$.

Λύση

Λύνουμε πρώτα την εξίσωση $g(x) = h(x)$ και έχουμε: $g(x) = h(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 = 4x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 2$.
Για $x = -1$ έχουμε $g(-1) = (-1)^2 + 3(-1) - 2 = -4$ $[= h(-1)]$.
Για $x = 2$ έχουμε $g(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 8$ $[= h(2)]$.

Έτσι, οι γραφικές παραστάσεις των g και h έχουν κοινά σημεία τα $M(-1, -4)$ και $N(2, 8)$ και μόνο αυτά. Εξετάζουμε τώρα αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται (περνάει) από το Μ ή το Ν. Έχουμε:

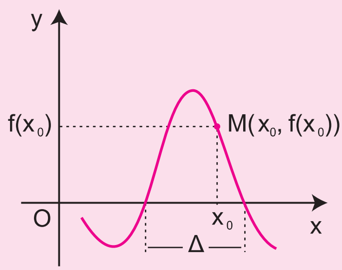
- $f(-1) = (-1)^3 = -1 \neq -4$, άρα η C_f δε διέρχεται από το Μ.
- $f(2) = 2^3 = 8\ [= g(2) = h(2)]$, άρα η C_f διέρχεται από το Ν.

Τελικά, οι γραφικές παραστάσεις των τριών συναρτήσεων f, g, h έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $N(2, 8)$.

Σχετική θέση γραφικής παράστασης συνάρτησης και άξονα x΄x

Λέμε ότι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x:

- **σ' ένα σημείο x_0 (ή για $x = x_0$)**, όταν το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ της C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x, δηλαδή **όταν $f(x_0) > 0$**.
- **σ' ένα σύνολο Δ**, όταν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.



Αντίστοιχα, για τις εκφράσεις «κάτω από τον άξονα x΄x» ($f(x) < 0$), «από τον άξονα x΄x και πάνω» ($f(x) \geq 0$), «από τον άξονα x΄x και κάτω» ($f(x) \leq 0$).

14. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση C της συνάρτησης $f(x) = -3(x+2)(x-5)$ βρίσκεται:

i) πάνω από τον άξονα x΄x **ii) κάτω από τον άξονα x΄x**

iii) από τον άξονα x΄x και πάνω **iv) από τον άξονα x΄x και κάτω**

Λύση

Οι ρίζες και το πρόσημο της παράστασης $-3(x+2)(x-5)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$-3(x+2)(x-5)$		−	0	+	0	−	

i) $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 5$.
Η C βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x στο διάστημα (2, 5).

ii) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 5$.
Η C βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x στα διαστήματα $(-\infty, -2)$ και $(5, +\infty)$.

iii) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 5$.
Η C βρίσκεται από τον άξονα x΄x και πάνω στο διάστημα $[-2, 5]$.

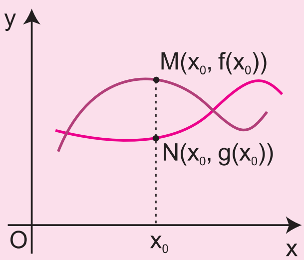
iv) $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 5$.
Η C βρίσκεται από τον άξονα x΄x και κάτω στα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[5, +\infty)$.

Σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Έστω f, g δύο συναρτήσεις με γραφικές παραστάσεις C_f, C_g αντίστοιχα.

Λέμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g:

- στο σημείο x_0 (ή για $x = x_0$) όταν το σημείο της C_f με τετμημένη x_0 [δηλαδή $M(x_0, f(x_0))$] βρίσκεται πάνω από το σημείο της C_g με τετμημένη x_0 [δηλαδή το $N(x_0, g(x_0))$], δηλαδή όταν $f(x_0) > g(x_0)$.
- στο σύνολο Δ όταν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.



Ανάλογα και για τις εκφράσεις: C_f κάτω από την C_g $(f(x) < g(x))$, C_f από την C_g και πάνω $(f(x) \geq g(x))$, C_f από την C_g και κάτω $(f(x) \leq g(x))$.

15. Να βρείτε σε ποια διαστήματα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 9 - x^2$.

Λύση

Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > g(x)$ και έχουμε:

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 + 1 > 9 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x^2 > 9 - 1 \Leftrightarrow 2x^2 > 8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4} \Leftrightarrow |x| > 2 \Leftrightarrow (x < -2$ ή $x > 2)$.

Έτσι, τα ζητούμενα διαστήματα είναι τα $(-\infty, -2)$ και $(2, +\infty)$.

Σχέση μεταξύ της C_f και της: i) C_{-f} ii) $C_{|f|}$

Έστω f μια συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή x και πεδίο ορισμού Α.

- Η C_{-f}, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f(x)$, αποτελείται από τα σημεία της μορφής $N(x, -f(x))$. Όμως τα σημεία της μορφής $N(x, -f(x))$ είναι τα συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της C_f ως προς τον άξονα $x'x$. Έτσι:

  Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f(x)$ είναι η συμμετρική γραμμή της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.

- Ισχύει: $|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{αν } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{αν } f(x) < 0 \end{cases}$

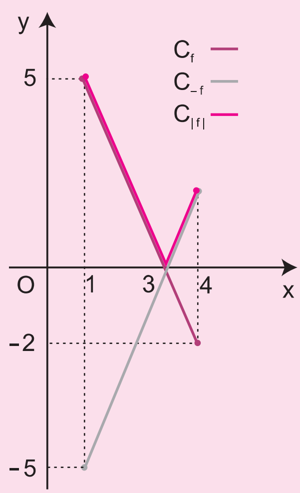
  Η $C_{|f|}$, δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$, αποτελείται από τα σημεία της μορφής:

$$N(x, |f(x)|) \equiv \begin{cases} N(x, f(x)), & \text{αν } f(x) \geq 0 \text{ [δηλαδή αν το } (x, f(x)) \text{ βρίσκεται από τον άξονα } x'x \text{ και πάνω]} \\ N(x, -f(x)), & \text{αν } f(x) < 0 \text{ [δηλαδή αν το } (x, f(x)) \text{ βρίσκεται κάτω από τον } x'x\text{]} \end{cases}$$

Επομένως:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f(x)|$ αποτελείται:

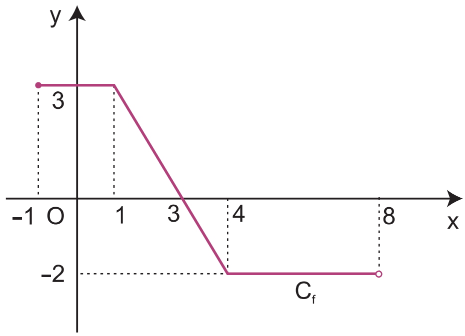
- από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται από τον άξονα $x'x$ και πάνω.
- από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ των τμημάτων της C_f τα οποία βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.



16. **Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:**

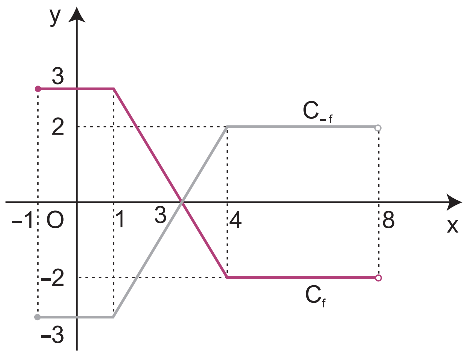
i) $g(x) = -f(x)$

ii) $h(x) = |f(x)|$



Λύση

i) Η C_g είναι η συμμετρική γραμμή της C_f ως προς τον άξονα x′x.



ii) Η C_h αποτελείται:

- από τα τμήματα της C_f που βρίσκονται από τον άξονα x′x και πάνω.
- από τα συμμετρικά ως προς τον άξονα x′x τμήματα των τμημάτων της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x′x.