4ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

Περιέχει:

- **Θέματα μηχανικής στερεού σώματος**
- **Συνδυαστικά θέματα**
- **Γενικές οδηγίες για τη λύση συνδυαστικών θεμάτων**

4ο ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

1. Πλήθος N περιστροφών στερεού σε χρονικό διάστημα t_1

α. Όταν ω = σταθ.

Εφόσον σε χρόνο T το στερεό διαγράφει μία περιστροφή, το πλήθος N των περιστροφών σε χρόνο t_1 θα δίνεται από την πρακτική σχέση $N = \frac{t_1}{T}$.

β. Όταν η γωνιακή ταχύτητα ω μεταβάλλεται με α_γ = σταθ.

Από τη σχέση $\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$ προσδιορίζουμε τη γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta_1$ στο χρονικό διάστημα t_1. Στη συνέχεια λέμε ότι:

$N = \frac{\Delta\theta_1}{2\pi}$, εφόσον 2π rad αντιστοιχούν σε μία περιστροφή.

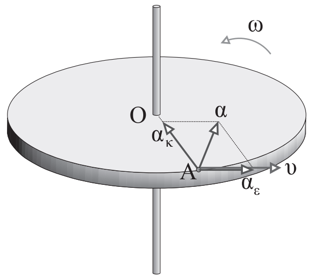
2. Οι επιταχύνσεις ενός στρεφόμενου σώματος

- **Γωνιακή επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\gamma$:** Δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της γωνιακής ταχύτητας του στρεφόμενου σώματος. Έτσι, $\alpha_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$.
- **Κεντρομόλος επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\kappa$** (ενός σημείου της περιφέρειας, π.χ. ενός στρεφόμενου δίσκου): Δείχνει τον ρυθμό με τον οποίο αλλάζει **η διεύθυνση** της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}$ και υπάρχει ακόμα και αν το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας είναι σταθερό (αφού η διεύθυνση της $\vec{\upsilon}$ έτσι κι αλλιώς συνεχώς αλλάζει).
  Το μέτρο της δίνεται από τις σχέσεις $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon^2}{R}$ και $\alpha_\kappa = \omega^2 R$.
- **Επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\varepsilon$:** Δείχνει τον ρυθμό μεταβολής **του μέτρου** της γραμμικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}$. Το μέτρο της $\vec{\alpha}_\varepsilon$ δίνεται από τη σχέση $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$.
- **Γραμμική επιτάχυνση $\vec{\alpha}$:** Είναι η συνισταμένη των $\vec{\alpha}_\kappa$ και $\vec{\alpha}_\varepsilon$ και το μέτρο της δίνεται από τη σχέση:
  $\alpha = \sqrt{\alpha_\kappa^2 + \alpha_\varepsilon^2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\alpha_\gamma R)^2}$.
  (Δείτε και το σχήμα 1.)

Να έχετε υπόψη σας και τα εξής:

– Η σχέση $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$ ισχύει πάντοτε.

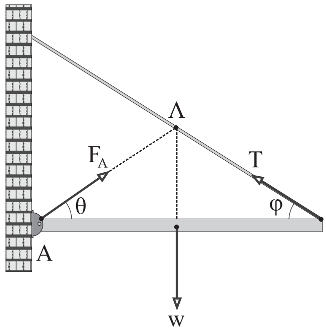
– Στην περίπτωση σώματος που κυλάει χωρίς να ολισθαίνει ισχύει ότι $\alpha_\varepsilon = \alpha_{cm}$, όπου α_{cm} είναι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος. Έτσι θα ισχύει ότι και $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$. (Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$ μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της μεταφορικής ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{cm}$ του κέντρου μάζας του σώματος.)



Σχήμα 1

3. «Έξυπνη» εφαρμογή της σχέσης Στ = 0 για σώμα (συνήθως ράβδο) που δεν περιστρέφεται

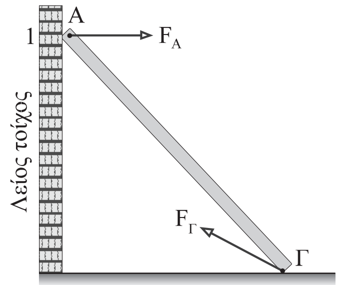
Αν ένα σώμα ισορροπεί, ισχύει $\Sigma\tau = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο του. Συνήθως μας συμφέρει να εφαρμόσουμε αρχικά τη συνθήκη $\Sigma\tau = 0$ **ως προς το σημείο εφαρμογής της πιο «δύσκολης» δύναμης, δηλαδή της δύναμης** για την οποία έχουμε τις λιγότερες πληροφορίες. Στο σχήμα 2, για παράδειγμα, αφού συνήθως δίνεται η γωνία $\hat{\varphi}$ (ενώ δε γνωρίζουμε τη γωνία $\hat{\theta}$), λαμβάνουμε $\Sigma\tau_A = 0$, οπότε $\tau_{F_A} = 0$ και μένει ως μόνος άγνωστος η δύναμη $\vec{T}$ (ή η συνιστώσα της $\vec{T}_y$). Να έχετε υπόψη σας ακόμα ότι, **όταν σε ράβδο που ισορροπεί ασκούνται μόνο τρεις δυνάμεις, οι φορείς τους διέρχονται από το ίδιο σημείο**. Αυτό στο σχήμα 2 μας βοήθησε στο να σχεδιάσουμε την παντελώς άγνωστη δύναμη $\vec{F}_A$.



Σχήμα 2

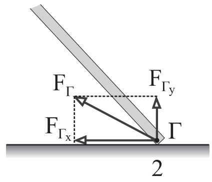
4. Πώς σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στα σημεία επαφής μιας ράβδου με άλλα σώματα

- Αν η ράβδος ακουμπάει σε λείο τοίχο ή δάπεδο, η δύναμη επαφής που δέχεται από τον τοίχο ή το δάπεδο θα είναι **κάθετη** στην επιφάνεια επαφής. Στο σχήμα 3 το άκρο Α της ράβδου ακουμπάει σε λείο τοίχο, οπότε η δύναμη επαφής $\vec{F}_A$ από τον τοίχο στη ράβδο θα είναι **κάθετη** στην επιφάνεια επαφής 1 τοίχου και ράβδου.
- Αν η ράβδος ακουμπάει σε **τραχύ** τοίχο ή δάπεδο, η αντίστοιχη δύναμη επαφής θα είναι **πλά-**



Σχήμα 3

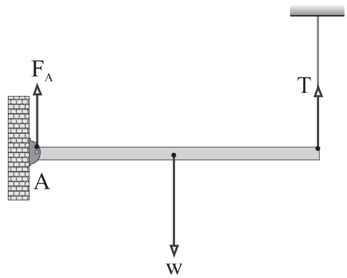
για στην επιφάνεια επαφής. Στο σχήμα 3 το άκρο Γ της ράβδου ακουμπάει στο τραχύ δάπεδο. Έτσι η δύναμη επαφής $\vec{F}_{\Gamma}$ θα είναι **πλάγια** ως προς την επαφή 2 δαπέδου και ράβδου. Η κλίση της θα είναι προς την αντίθετη κατεύθυνση από την κατεύθυνση που κινείται ή τείνει να κινηθεί το άκρο αυτό της ράβδου. Στο σχήμα 4 η $\vec{F}_{\Gamma}$ αναλύθηκε στις $\vec{F}_{\Gamma_x}$ και $\vec{F}_{\Gamma_y}$, οι οποίες «παίζουν» τον ρόλο της τριβής $\vec{T}$ (στατικής ή ολίσθησης) και της κάθετης αντίδρασης $\vec{N}$ αντίστοιχα. Από τη γνωστή σχέση $T = \mu N$ προκύπτει και ότι $F_{\Gamma_x} = \mu F_{\Gamma_y}$.



Σχήμα 4

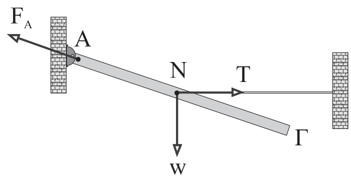
- **Αν η ράβδος είναι αρθρωμένη (πακτωμένη) σε τοίχο και ισορροπεί**

i) Στην περίπτωση που οι άλλες δυνάμεις που δέχεται η ράβδος είναι κατακόρυφες, η δύναμη $\vec{F}_A$ από την άρθρωση Α θα είναι και αυτή κατακόρυφη. Τη σχεδιάζουμε με τη φορά που μας φαίνεται ως πιθανότερη (προς τα πάνω ή προς τα κάτω) και, αφού με τη βοήθεια των σχέσεων $\Sigma\tau = 0$ και $\Sigma F_y = 0$ την υπολογίσουμε, αν προκύψει $F_A > 0$, την αφήνουμε όπως είναι, ενώ, αν προκύψει $F_A < 0$, την αντιστρέφουμε.



Σχήμα 5

ii) Αν στη ράβδο μαζί με την $\vec{F}_A$ ασκούνται **μόνο τρεις** δυνάμεις, τότε ο φορέας της $\vec{F}_A$ θα διέρχεται από το σημείο τομής των δύο άλλων δυνάμεων. Στο σχήμα 6 η δύναμη $\vec{F}_A$ θα έχει τη διεύθυνση της ράβδου ΑΓ, αφού ο φορέας της πρέπει να διέρχεται από το σημείο Ν της ράβδου, στο οποίο τέμνονται οι άλλες δύο δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{T}$. (Η φορά της $\vec{F}_A$ είναι προς τα αριστερά, γιατί η συνιστώσα της τάσης $\vec{T}$ κατά τη διεύθυνση της ράβδου είναι προς τα δεξιά και μόνο έτσι θα ικανοποιείται η συνθήκη $\Sigma F_x = 0$.)

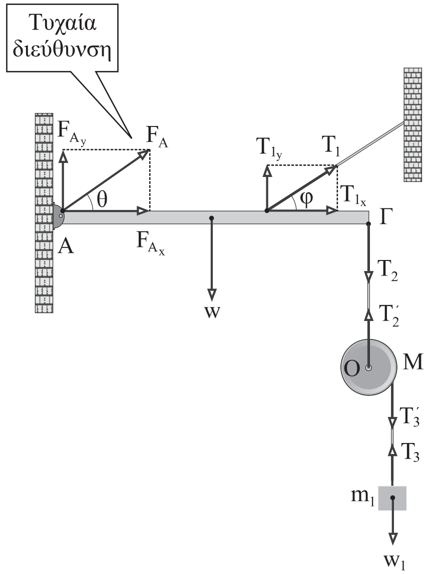


Σχήμα 6

iii) Όταν η ράβδος δέχεται πάνω από **τρεις δυνάμεις σε τυχαίες διευθύνσεις**, σχεδιάζουμε τη δύναμη $\vec{F}_A$ σε τυχαία διεύθυνση και την αναλύουμε στις συνιστώσες της $\vec{F}_{A_x}$ και $\vec{F}_{A_y}$. (Δείτε προσεκτικά την περίπτωση του σχήματος 7.) Με τη βοήθεια των σχέσεων $\Sigma F_x = 0$, $\Sigma F_y = 0$ και $\Sigma\tau = 0$ υπολογίζουμε και τις συνιστώσες $\vec{F}_{A_x}$ και $\vec{F}_{A_y}$. Αν κάποια από τις $\vec{F}_{A_x}$ ή $\vec{F}_{A_y}$ προκύψει αρνητική, την αντιστρέφουμε στο σχήμα, κάνοντας και την αντίστοιχη βέβαια διόρθωση για την $\vec{F}_A$. Το μέτρο και η διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_A$ προκύπτουν από τις σχέσεις:

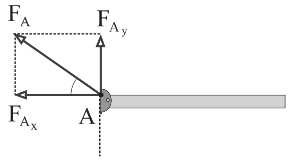
$$F_A = \sqrt{F_{A_x}^2 + F_{A_y}^2}$$

και $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{F_{A_y}}{F_{A_x}}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 7

(Στην περίπτωση του σχήματος 7 θα προκύψει $F_{A_x} < 0$. Αυτό συμβαίνει επειδή η άλλη συνιστώσα δύναμη στη διεύθυνση της ράβδου είναι η $\vec{T}_{1_x}$ με φορά προς τα δεξιά. Έτσι, για να πραγματοποιείται η συνθήκη $\Sigma F_x = 0$, θα πρέπει η $\vec{F}_{A_x}$ να έχει φορά προς τα αριστερά. Στο σχήμα 8 φαίνεται και η διόρθωση που κάναμε.)

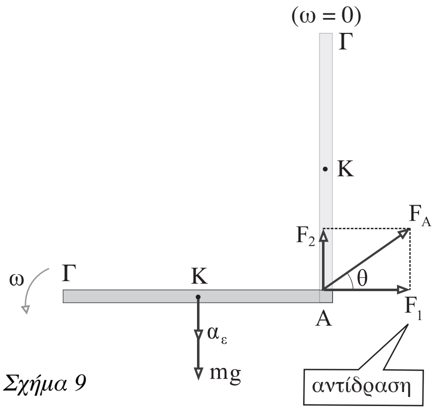


Σχήμα 8

- **Δύναμη από τον άξονα περιστροφής, αν η ράβδος αφεθεί ελεύθερη να κινηθεί σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από το ένα άκρο της.**

i) *Η ράβδος διέρχεται από την οριζόντια θέση*

Τη στιγμή που η ράβδος περνά από την οριζόντια θέση θα έχει γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ και το κέντρο μάζας της Κ θα έχει γραμμική ταχύτητα $\vec{\upsilon}$. (Τις $\vec{\omega}$ και $\vec{\upsilon}$ τις υπολογίζουμε με εφαρμογή της Α.Δ.Μ.Ε. για την περιστροφική



Σχήμα 9

κίνηση της ράβδου.) Η δύναμη $\vec{F}_A$ που δέχεται η ράβδος από τον άξονά της τη στιγμή αυτή είναι η συνισταμένη των δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$. (Δείτε και το σχήμα 9.)

Υπολογισμός της συνιστώσας $\vec{F}_1$

Η δύναμη $\vec{F}_1$ **αντιπροσωπεύει τη συνολική κεντρομόλο δύναμη** των στοιχειωδών μαζών της ράβδου που εκτελούν κυκλική κίνηση. Θα την υπολογίσουμε αν θεωρήσουμε ότι όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας Κ της ράβδου και εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας $\frac{\ell}{2}$. Θα είναι πράγματι:

$$F_1 = \frac{m\upsilon^2}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow F_1 = \frac{2m\upsilon^2}{\ell} \xrightarrow{\upsilon = \omega\frac{\ell}{2}} F_1 = \frac{2m\omega^2\frac{\ell^2}{4}}{\ell} \Rightarrow \mathbf{F_1 = \frac{m\omega^2\ell}{2}} \ (1)$$

Υπολογισμός της δύναμης $\vec{F}_2$

Η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση y είναι υπαίτια για την επιτρόχια επιτάχυνση $\vec{\alpha}_\varepsilon$. Έχουμε $\Sigma\vec{F}_y = m\vec{\alpha}_\varepsilon \Rightarrow mg - F_2 = m\alpha_\varepsilon$ (α). Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την περιστροφική κίνηση προκύπτει ότι:

$$\Sigma\tau = I_A\alpha_\gamma \Rightarrow \tau_w = I_A\alpha_\gamma \Rightarrow mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{3}m\ell^2\alpha_\gamma \Rightarrow \alpha_\gamma = \frac{3g}{2\ell}.$$

Όμως $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma\frac{\ell}{2} \Rightarrow \alpha_\varepsilon = \frac{3g}{4}$.

Επομένως από τη σχέση (α) έχουμε:

$$mg - F_2 = m\frac{3g}{4} \Rightarrow F_2 = \frac{mg}{4} \ (2)$$

Υπολογισμός της δύναμης $\vec{F}_A$

Μέτρο της δύναμης $\vec{F}_A$:

$$F_A = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}} \mathbf{F_A = \gamma\nu\omega\sigma\tau\acute{o}}.$$

Διεύθυνση της δύναμης $\vec{F}_A$:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{F_2}{F_1} \overset{(2)}{\underset{(1)}{\Rightarrow}} \boldsymbol{\varepsilon\varphi\theta = ...}$$

ii) *Η ράβδος διέρχεται από την κατακόρυφη θέση*

Όταν η ράβδος διέρχεται από την κατακόρυφη θέση, πρέπει $\Sigma F_x = m\alpha_\varepsilon$ και $\Sigma F_y = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho}$.

Αλλά $\Sigma F_x = m\alpha_\varepsilon = m\alpha_\gamma \dfrac{\ell}{2} \Rightarrow$

$\xrightarrow{\alpha_\gamma = 0}$ $\Sigma F_x = 0$, οπότε δεν υπάρχει συνιστώσα δύναμης στην οριζόντια διεύθυνση.

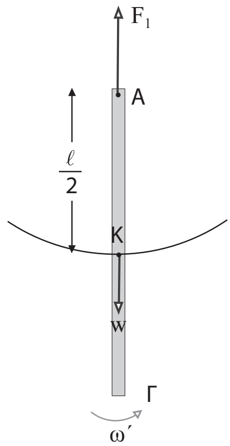
Επίσης, $\Sigma F_y = F_{\kappa\varepsilon\nu\tau\rho} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F_1 - mg = m\omega'^2 \frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_1 = mg + m\omega'^2 \frac{\ell}{2} \Rightarrow F_1 = ...$$

Έτσι, $F_A = F_1 \Rightarrow \boldsymbol{F_A = ...}$

(Για περισσότερα δείτε το πρόβλημα 4.6.)



Σχήμα 10

5. Δυναμική μελέτη σώματος που εκτελεί σύνθετη κίνηση

α. Σώμα που εκτελεί μεταφορική και περιστροφική κίνηση ταυτόχρονα

Μελετάμε ξεχωριστά τις δύο κινήσεις που κάνει το σώμα.

i) Για την περιστροφική κίνηση του σώματος εφαρμόζουμε:

- Τον θεμελιώδη νόμο $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$ (1)
- Εφόσον $\alpha_\gamma =$ σταθ., τους τύπους:

  $\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma t$ και $\theta = \omega_0 t \pm \dfrac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$.

ii) Για τη μεταφορική κίνηση του σώματος εφαρμόζουμε:

- Τον θεμελιώδη νόμο $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm}$ (2)
- Τους τύπους $\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha_{cm} t$ και $x = \upsilon_0 t \pm \dfrac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$, εφόσον $\alpha_{cm} =$ σταθ.

iii) Ισχύει **πάντοτε** ότι $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$. Αν το σώμα **κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, και μόνο τότε** έχουμε ότι $\alpha_{cm} = \alpha_\varepsilon$, επομένως ισχύει και $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ (3).

β. Σώμα που εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση αλλά συνδέεται με άλλο σώμα που εκτελεί μόνο μεταφορική κίνηση

Σε αυτές τις περιπτώσεις μελετάμε την κίνηση κάθε σώματος ξεχωριστά.

i) Για το σώμα που εκτελεί την περιστροφική κίνηση έχουμε $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$ (1) και τους τύπους:

$\omega = \omega_0 \pm \alpha_\gamma t$ και $\theta = \omega_0 t \pm \dfrac{1}{2}\alpha_\gamma t^2$, εφόσον $\alpha_\gamma =$ σταθ.

ii) Για κάθε σώμα που εκτελεί μεταφορική κίνηση έχουμε $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm}$ (2) και τους τύπους $\upsilon = \upsilon_0 \pm \alpha_{cm} t$ και $x = \upsilon_0 t \pm \dfrac{1}{2}\alpha_{cm} t^2$, εφόσον $\alpha_{cm} =$ σταθ.

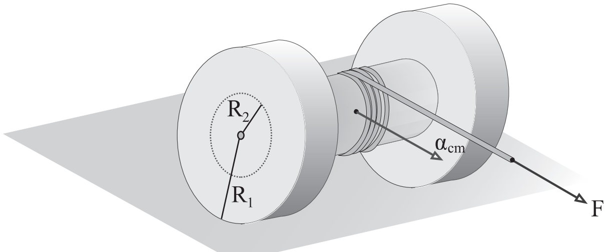
iii) Όταν τα σώματα συνδέονται με νήμα **που δεν ολισθαίνει**, ισχύει ότι το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας του στρεφόμενου σώματος ισούται με το μέτρο της επιτάχυνσης των σωμάτων που εκτελούν τη μεταφορική κίνηση. Δηλαδή $\alpha_{cm} = \alpha_\varepsilon$, οπότε, αφού έχουμε πάντα ότι $\alpha_\varepsilon = \alpha_\gamma R$, ισχύει και $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ (3).

✓ **Χρειάζεται προσοχή και στο εξής:** Στις σχέσεις $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm}$ και $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma$, τις δυνάμεις, τις ροπές και τις επιταχύνσεις τις αντικαθιστούμε με τις αλγεβρικές τους τιμές. Καθορίζουμε τη θετική φορά και για κάθε μέγεθος βάζουμε το κατάλληλο πρόσημο. Προσέχουμε, σε αυτή τη διαδικασία, να μην ξεχάσουμε να θέσουμε το κατάλληλο πρόσημο και στις επιταχύνσεις $\vec{\alpha}_{cm}$ και $\vec{\alpha}_\gamma$.

6. Σώμα που έχει δύο ακτίνες

Όταν το σύστημα που κάνει τη μεταφορική και την περιστροφική κίνηση έχει δύο ακτίνες R_1 και R_2, στη σχέση $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ μπαίνει η ακτίνα του επιμέρους σώματος που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, δηλαδή αυτού που είναι σε επαφή με το έδαφος.

Στο καρούλι του σχήματος 11, για παράδειγμα, με μικρή

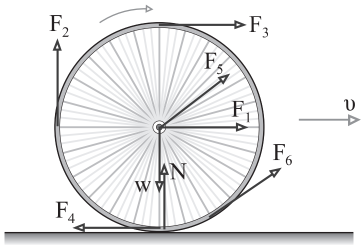


Σχήμα 11

ακτίνα R_2 και μεγάλη ακτίνα R_1, έχουμε $\boldsymbol{\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R_1}$, επειδή στο δάπεδο «πατάει» ο δίσκος με τη μεγάλη ακτίνα R_1.

7. Προσδιορισμός της φοράς της στατικής τριβής σε ένα σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

Ένα σώμα εκτελεί σύνθετη κίνηση και δέχεται κάποιες δυνάμεις, όπως ο τροχός του σχήματος 12. Μπορούμε να λέμε ότι μία δύναμη:



Σχήμα 12

- Έχει **μόνο μεταφορικό** ρόλο, όταν ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας, οπότε δε δημιουργεί ροπή και επιπλέον η δύναμη ή κάποια συνιστώσα της έχει τη διεύθυνση της μεταφορικής κίνησης (π.χ. οι δυνάμεις $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_5$ στο σχήμα).
- Έχει **μόνο περιστροφικό** ρόλο, όταν ο φορέας της δε διέρχεται από το κέντρο μάζας και είναι κάθετος στη διεύθυνση της μεταφορικής κίνησης (π.χ. η δύναμη $\vec{F}_2$ στο σχήμα).
- Δεν έχει **ούτε μεταφορικό ούτε περιστροφικό** ρόλο, όταν ο φορέας της διέρχεται από το κέντρο μάζας, οπότε δε δημιουργεί ροπή ως προς αυτό το σημείο, και ταυτόχρονα είναι κάθετος στη διεύθυνση της κίνησης (π.χ. οι δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{N}$ στο σχήμα).
- Έχει **και μεταφορικό και περιστροφικό** ρόλο, όταν ο φορέας της δε διέρχεται από το κέντρο μάζας και δεν είναι κάθετος στη διεύθυνση της μεταφορικής κίνησης (π.χ. οι δυνάμεις $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ και $\vec{F}_6$ στο σχήμα).

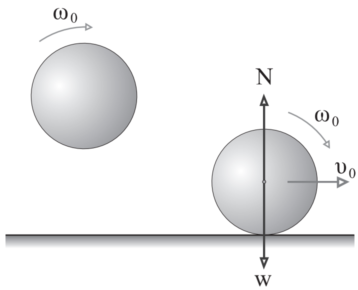
Για να προσδιορίσουμε τη φορά της στατικής τριβής στο σώμα που κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει:

- Ελέγχουμε πρώτα τον ρόλο (μεταφορικό ή περιστροφικό) που έχουν οι υπόλοιπες δυνάμεις πλην της στατικής τριβής, που ασκούνται στο σώμα.
- Αν καμία από τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα δεν έχει τον έναν από τους δύο ρόλους, τότε σχεδιάζουμε τη στατική τριβή με τέτοια φορά, ώστε να έχει οπωσδήποτε τον ρόλο που λείπει.
- Αν κάποια ή κάποιες από τις δυνάμεις (ή οι συνιστώσες τους) έχουν και τους δύο ρόλους, τότε σχεδιάζουμε τη στατική τριβή $\vec{T}$ με αυθαίρετη φορά. Αν μετά τους υπολογισμούς προκύψει $T < 0$, σημαίνει ότι τη σχεδιάσαμε με αντίθετη φορά από την πραγματική.

8. Μελέτη της κύλισης στερεού σε λείο επίπεδο

α. Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο

Ρίχνουμε ένα σώμα στο λείο οριζόντιο επίπεδο ενώ αυτό ήδη στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω_0. Αν ρίξουμε το σώμα έτσι ώστε η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ του κέντρου του να έχει μέτρο $\boldsymbol{\upsilon_0 = \omega_0 R}$, τότε το σώμα **θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει**. Αυτό συμβαίνει γιατί οι ταχύτητες υ_0 και ω_0 θα παραμείνουν σταθερές, εφόσον, όπως φαίνεται και στο σχήμα 13, δεν υπάρχει συνισταμένη δύναμη, αλλά ούτε και συνισταμένη ροπή για να τις μεταβάλει.



Σχήμα 13

β. Κύλιση και ολίσθηση σε λείο οριζόντιο επίπεδο

Ρίχνουμε ένα σώμα στο λείο οριζόντιο επίπεδο ενώ αυτό ήδη στρέφεται με μία αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0. Αν ρίξουμε το σώμα έτσι ώστε η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ του κέντρου μάζας του να έχει μέτρο $\boldsymbol{\upsilon_0 \neq \omega_0 R}$, τότε το σώμα **και θα κυλίεται και θα ολισθαίνει**. Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

i) Αν $\upsilon_0 > \omega_0 R$, τότε στον χρόνο της περιόδου το σώμα μετατοπίζεται κατά $s > 2\pi R$, η μεταφορική κίνηση υπερισχύει της περιστροφικής και λέμε ότι το σώμα **κυλάει και τσουλάει**.

ii) Αν $\upsilon_0 < \omega_0 R$, τότε στον χρόνο της περιόδου το σώμα μετατοπίζεται κατά $s < 2\pi R$, η περιστροφική κίνηση υπερισχύει της μεταφορικής και λέμε ότι το σώμα **κυλάει και σπινάρει**.

9. Κύλιση και ολίσθηση: πώς υπολογίζουμε σε πόσο χρόνο (t) το σώμα θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

α. Αν αρχικά $\boldsymbol{\upsilon_{cm} > \omega R}$, το σώμα **κυλάει και ολισθαίνει**. Για να αρχίσει κάποια στιγμή να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, θα πρέπει:

- Η υ_{cm} να ελαττώνεται, δηλαδή η μεταφορική κίνηση να είναι επιβραδυνόμενη.
- Η ω να είναι σταθερή ή να αυξάνεται. Το σώμα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τη στιγμή (t) που η υ_{cm}, καθώς ελαττώνεται, γίνεται ίση με την ωR, δηλαδή όταν γίνει $\upsilon_{cm} = \omega R$ (1), και από εκεί και μετά αναιρεθούν τα αίτια που ελαττώνουν την υ_{cm} και αυξάνουν την ω. Αν, για παρά-

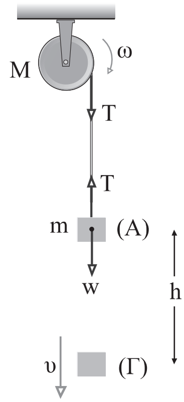
δειγμα, η υ_{cm} ελαττώνεται με σταθερή επιβράδυνση α_{cm} και η ω αυξάνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση α_γ, τότε $\upsilon_{cm} = \upsilon_0 - \alpha_{cm}t$ και $\omega = \alpha_\gamma t$. Επομένως η σχέση (1) γίνεται $\upsilon_0 - \alpha_{cm}t = \alpha_\gamma tR \Rightarrow$ **t = γνωστό**.

β. Αν αρχικά $\upsilon_{cm} < \omega R$, το σώμα θα αρχίσει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει τη χρονική στιγμή (t) που θα γίνει $\upsilon_{cm} = \omega R$ (1) και από εκεί και μετά θα αναιρεθούν τα αίτια που αυξάνουν την υ_{cm} και ελαττώνουν την ω. Αν οι υ_{cm} και ω μεταβάλλονται ομαλά, η σχέση (1) θα γίνει $\alpha_{cm}t = (\omega_0 - \alpha_\gamma t)R \Rightarrow$ **t = γνωστό**.

10. Τροχαλία και σώματα

α. Τροχαλία με ένα σώμα

Καθώς το σώμα μάζας m πέφτει, ξετυλίγεται το νήμα και στρέφεται η τροχαλία:

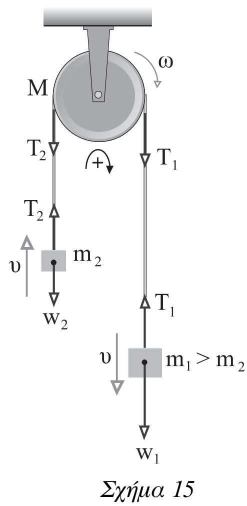


Σχήμα 14

- Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε. για την πτώση του σώματος, αφού εκτός από το βάρος $\vec{w}$ ασκείται και η τάση του νήματος $\vec{T}$.
- Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. **για την πτώση του σώματος**: $\Delta K = \Sigma W \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_T$.
  [Άρα, αρχικά, πρέπει από τη βασική τριάδα σχέσεων $\Sigma\vec{F} = m\vec{\alpha}_{cm}$, $\Sigma\vec{\tau} = I\vec{\alpha}_\gamma$ και $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ να βρούμε (και) την $\vec{T}$.]
- Μπορούμε ακόμα να εφαρμόσουμε και το Θ.Μ.Κ.Ε. **για το σύστημα**:
  $\Delta K_{συστ} = \Sigma W_{F_{εξωτ}}$ ή $\left(\frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m\upsilon^2\right) - (0 + 0) = W_w$.
  Δηλαδή, αν εφαρμόσουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. **για το σύστημα**, **δεν** «παίζουν» οι εσωτερικές δυνάμεις της τάσης του νήματος.

β. Τροχαλία με δύο σώματα

- Η τροχαλία στρέφεται προς τα εκεί που τραβάει η πιο μεγάλη μάζα. Ισχύουν:
- $|\vec{\alpha}_1| = |\vec{\alpha}_2| = \alpha_{cm}$ (γιατί το νήμα είναι μη εκτατό).
- $T_1 \neq T_2$.
- Η τριάδα σχέσεων γίνεται τετράδα:
  $\Sigma\vec{F}_1 = m_1\vec{\alpha}_{cm}$ ή $w_1 - T_1 = m_1\alpha_{cm}$ (1)
  $\Sigma\vec{F}_2 = m_2\vec{\alpha}_{cm}$ ή $T_2 - w_2 = m_2\alpha_{cm}$ (2)
  $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$ ή $-T_1R + T_2R = I(-\alpha_\gamma) \Rightarrow$
  $\Rightarrow T_1R - T_2R = I\alpha_\gamma$ (3)
  και $\alpha_{cm} = \alpha_\gamma R$ (4)



Σχήμα 15

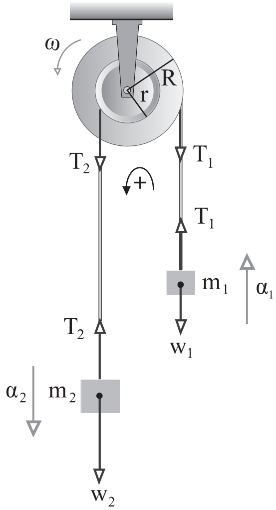
γ. Διπλή (κλιμακωτή) τροχαλία

Πρώτα διερευνούμε προς τα πού θα περιστραφεί το σύστημα.

Υπολογίζουμε την ολική ροπή $\tau_{\varepsilon\xi}$ των εξωτερικών δυνάμεων.

✓ Αν $\tau_{\varepsilon\xi} > 0$, η τροχαλία περιστρέφεται αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού (αριστερόστροφα).

✓ Αν $\tau_{\varepsilon\xi} < 0$, η τροχαλία στρέφεται σύμφωνα προς τους δείκτες του ρολογιού (δεξιόστροφα). Στο σχήμα 16 θεωρήσαμε ότι $\tau_{\varepsilon\xi} > 0$, δηλαδή $m_2gr - m_1gR > 0$ ή $m_2gr > m_1gR$.



Σχήμα 16

Ισχύουν:

i) $|\vec{\alpha}_1| \neq |\vec{\alpha}_2|$. Ας δούμε (σύντομα) γιατί:

Έχουμε:

• $\upsilon_1 = R\omega$ και $\upsilon_2 = r\omega$.

$$\text{Έτσι, } \alpha_{\varepsilon_1} = \frac{d\upsilon_1}{dt} \Rightarrow \alpha_{\varepsilon_1} = \frac{d(R\omega)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{\varepsilon_1} = R\alpha_\gamma.$$

Αφού το σχοινί δε γλιστράει, είναι $\alpha_1 = \alpha_{\varepsilon_1} \Rightarrow \alpha_1 = R\alpha_\gamma$ (α)

• $\upsilon_2 = r\omega$.

$$\text{Έτσι, } \alpha_{\varepsilon_2} = \frac{d\upsilon_2}{dt} = \frac{d(r\omega)}{dt} \Rightarrow \alpha_{\varepsilon_2} = r\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{\varepsilon_2} = r\alpha_\gamma,$$

οπότε και $\alpha_2 = r\alpha_\gamma$ (β)

Από τις σχέσεις (α) και (β), αφού $R \neq r$, προκύπτει ότι και $\alpha_1 \neq \alpha_2$. (Το ότι $|\vec{\alpha}_1| \neq |\vec{\alpha}_2|$ είναι απαραίτητο να το αποδεικνύετε κάθε φορά.)

ii) $T_1 \neq T_2$.

iii) Η τριάδα σχέσεων γίνεται τώρα πεντάδα:

• $\alpha_1 = \alpha_\gamma R$ (α)

• $\alpha_2 = \alpha_\gamma r$ (β)

• $\Sigma\vec{F}_1 = m_1\vec{\alpha}_1$, που για το σχήμα 16 γίνεται $T_1 - m_1g = m_1\alpha_1$ (1)

• $\Sigma\vec{F}_2 = m_2\vec{\alpha}_2$, δηλαδή $m_2g - T_2 = m_2\alpha_2$ (2)

• $\Sigma\tau = I\alpha_\gamma$, που για το σχήμα 16 γίνεται $T_2 r - T_1 R = I\alpha_\gamma$ (3)
Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2), (3), (α) και (β), υπολογίζουμε τα ζητούμενα άγνωστα μεγέθη.

δ. Σύγκριση της τάσης $\vec{T}$ του νήματος και του βάρους $\vec{w}$

i) *Το σώμα που είναι δεμένο στην τροχαλία ισορροπεί ή κινείται με σταθερή ταχύτητα.*
Δείτε το σχήμα 14. Εφόσον η μάζα m **ισορροπεί**, ισχύει:
$\Sigma F = 0 \Rightarrow T - w = 0 \Rightarrow \mathbf{T = w}$.

ii) *Το σώμα κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$.*
Έχουμε $w - T = m\alpha_{cm} \Rightarrow \mathbf{T = mg - m\alpha_{cm}}$, δηλαδή $\mathbf{T < w}$.

iii) *Το σώμα ανεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$ (η τροχαλία στρέφεται αριστερόστροφα εξαιτίας και μιας άλλης ροπής $\tau_F > \tau_T$).*
Έχουμε $T - w = m\alpha_{cm} \Rightarrow \mathbf{T = mg + m\alpha_{cm}}$, δηλαδή $\mathbf{T > w}$.

Χρειάζεται προσοχή λοιπόν! Να μην ξεχνιόμαστε και θεωρούμε ότι πάντοτε έχουμε T = w. Αυτό ισχύει **μόνο για την περίπτωση i**.

ε. Δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της

i) *Όλες οι δυνάμεις του συστήματος είναι κατακόρυφες.*
Σε αυτή την περίπτωση η δύναμη $\vec{F}_{\alpha\xi}$ που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της ισούται με το άθροισμα του βάρους της $\vec{Mg}$ και όλων των τάσεων που δέχεται από τα νήματα.

• Στην περίπτωση του σχήματος 16, για παράδειγμα:
$F_{\alpha\xi} = M_{o\lambda}g + T_1 + T_2$.

• Στην περίπτωση του σχήματος 15:
$F_{\alpha\xi} = Mg + T_1 + T_2$.

• Στην περίπτωση του σχήματος 14:

$F_{\alpha\xi} = Mg + T$, οπότε:

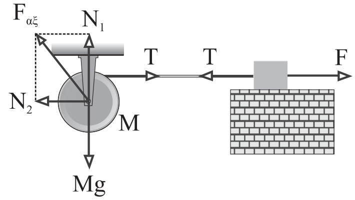
– Αν $\upsilon = 0$ ή $\upsilon =$ σταθ., τότε $F_{\alpha\xi} = Mg + mg$.

– Αν το σώμα κατεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$, τότε:
$F_{\alpha\xi} = Mg + (mg - m\alpha_{cm})$.

– Αν το σώμα ανεβαίνει με επιτάχυνση $\vec{\alpha}_{cm}$, τότε:
$F_{\alpha\xi} = Mg + (mg + m\alpha_{cm})$.

ii) *Η τροχαλία εκτός από τις κατακόρυφες δέχεται και οριζόντια δύναμη ή οριζόντια συνιστώσα δύναμης.*

Σε αυτή την περίπτωση τη δύναμη που δέχεται η τροχαλία από τον άξονά της την υπολογίζουμε ως εξής:



Σχήμα 17

- $ΣF_x = 0 \Rightarrow N_2 = T$.
- $ΣF_y = 0 \Rightarrow N_1 = Mg$.
- Έτσι, $F_{αξ} = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} \Rightarrow$

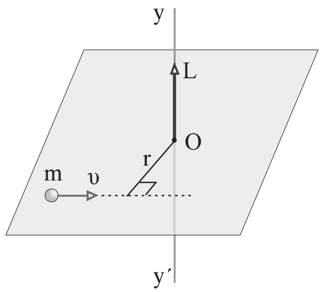
  $\Rightarrow \mathbf{F_{αξ} = \sqrt{T^2 + (Mg)^2}}$.

Αρκεί βέβαια προηγουμένως να έχουμε υπολογίσει και το μέτρο της τάσης του νήματος $\vec{T}$.

11. Στροφορμή υλικού σημείου που κινείται ευθύγραμμα

Ένα υλικό σημείο μάζας m έχει στροφορμή ακόμα και αν κινείται ευθύγραμμα! Η στροφορμή ενός τέτοιου σημείου ως προς κάποιον άξονα y΄y έχει:

- **Μέτρο:** $L = mυr$, όπου r η απόσταση του φορέα της ταχύτητας $\vec{υ}$ από τον άξονα περιστροφής.
- **Φορέα:** τον άξονα περιστροφής.
- **Φορά:** που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού. (Δείτε και το σχήμα 18.)



Σχήμα 18

12. Πώς υπολογίζουμε τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής

- Τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής μπορούμε γενικά να τον υπολογίζουμε από τη γενικευμένη μορφή του θεμελιώδους νόμου για τη στροφική κίνηση, δηλαδή $\frac{dL}{dt} = Στ$.

  Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τη συνισταμένη ροπή που δέχεται το υπό εξέταση σώμα.
- Μπορούμε επίσης να τον υπολογίσουμε συνδυάζοντας τον παραπάνω τύπο με τον θεμελιώδη νόμο για τη στροφική κίνηση $Στ = Iα_γ$. Δηλαδή:

  $\frac{dL}{dt} = Στ = Iα_γ \Rightarrow \frac{dL}{dt} = Iα_γ$.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής συστήματος σωμάτων ισούται με τη συνισταμένη ροπή των εξωτερικών μόνο δυνάμεων. Δηλαδή:

  $\frac{dL_{συστ}}{dt} = Στ_{εξωτ.\ δυνάμεων}$

13. Κρούση και αρχή διατήρησης της στροφορμής

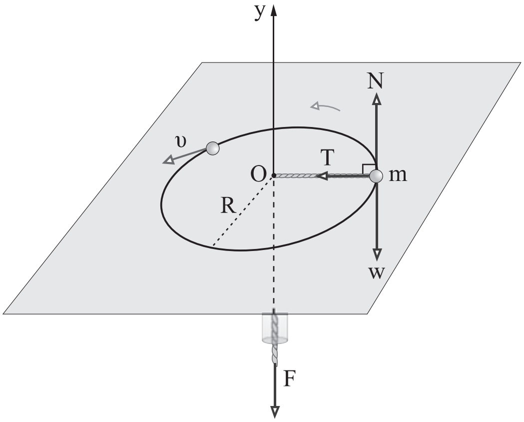
Αν σε μια κρούση το ένα τουλάχιστον από τα δύο συγκρουόμενα σώματα εκτελεί ή μπορεί να εκτελέσει **μόνο περιστροφική κίνηση**, εφαρμόζουμε την **αρχή διατήρησης της στροφορμής** του συστήματος των σωμάτων για να μελετήσουμε την κρούση (αντί για την αρχή διατήρησης της ορμής που πιθανόν να έχουμε συνηθίσει). Τις στροφορμές των σωμάτων που εμπλέκονται σ' αυτή την κρούση τις παίρνουμε ως προς τον άξονα περιστροφής του σώματος που εκτελεί την περιστροφική κίνηση.

Σημείωση

Όταν σε στερεό σώμα ή υλικό σημείο δρα εξωτερική δύναμη που όμως ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα περιστροφής ή είναι παράλληλος με αυτόν, **δε δημιουργεί ροπή**. Έτσι:

α. Η στροφορμή του σώματος διατηρείται.

β. Η ορμή του σώματος μεταβάλλεται.



Σχήμα 19

Για παράδειγμα:

Το μικρό σώμα μάζας m του σχήματος 19 είναι δεμένο στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος και κινείται πάνω στο λείο οριζόντιο τραπέζι εκτελώντας ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας R με γραμμική ταχύτητα $\vec{υ}$. Τραβώντας προς τα κάτω με μια κατακόρυφη δύναμη $\vec{F}$ το άλλο άκρο του νήματος, μειώνουμε στο ένα τρίτο την ακτίνα περιστροφής. Έχουμε: Οι δυνάμεις $\vec{w}$ και $\vec{N}$ δε δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής Oy, γιατί είναι παράλληλες με αυτόν. Η δύναμη $\vec{T}$ της τάσης από το νήμα δε δημιουργεί ούτε αυτή ροπή, γιατί ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα. Συνεπώς:

- Ισχύει $\Sigma τ = 0$, οπότε η στροφορμή του σώματος διατηρείται.
- Ισχύει $\Sigma F_{εξωτ} = T \neq 0$, οπότε η ορμή του σώματος δε διατηρείται.

Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής μπορούμε να υπολογίσουμε τη νέα τιμή $\vec{υ}'$ της γραμμικής ταχύτητας. Έχουμε:

$$mυR = mυ'r \xRightarrow{r = \frac{R}{3}} mυR = mυ'\frac{R}{3} \Rightarrow \boldsymbol{υ' = 3υ}.$$

Η αρχική ορμή του σώματος έχει μέτρο $p = mυ$ και η τελική ορμή $p' = mυ' \Rightarrow$ $\Rightarrow p' = 3mυ$ ή $p' = 3p$. Είναι φανερό ότι η ορμή $\vec{p}$ του σώματος δε διατηρείται.